1$^{\text{ère}}$ **S1**

Contrôle du vendredi 6 janvier 2012 (30 minutes)

• Une feuille de réponses est fournie avec le sujet. Seule cette feuille est à rendre à la fin du contrôle. L'énoncé est à conserver. Ne rien écrire ni surligner sur le sujet.

• Aucune justification n'est demandée à l'exception de la question 1°) c) de l'exercice **I** pour laquelle le détail de la démarche est demandé. N'indiquer qu'une seule réponse à chaque fois.

• Tirer les traits de fraction à la règle.

I. (2,5 points)

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction « racine carrée » dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) On note *T* la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.

a) Donner l'équation réduite de *T*.

b) Tracer *T* sur le graphique fourni sur la feuille de réponses.

c) **Question bonus à faire sur la dernière page de la feuille de réponses**

Étudier par le calcul, en détaillant bien la démarche, la position de $\mathcal{C}$ par rapport à *T*.

2°) Donner, sous la forme la plus simple possible, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point quelconque d'abscisse $a > 0$.

II. (3 points) Vrai ou faux ?

On considère la fonction *f* définie par $f\left(x\right) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Répondre par vrai ou faux sans justifier les réponses.

Chaque réponse juste rapporte un point.
Chaque réponse fausse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.

a. Pour tout réel *x*, $f'\left(x\right) = 3\left(x-1\right)^2$.

b. Il existe un seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 3.

c. Il existe un seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est horizontale.

III. (5 points) Questions rapides

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) On considère une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

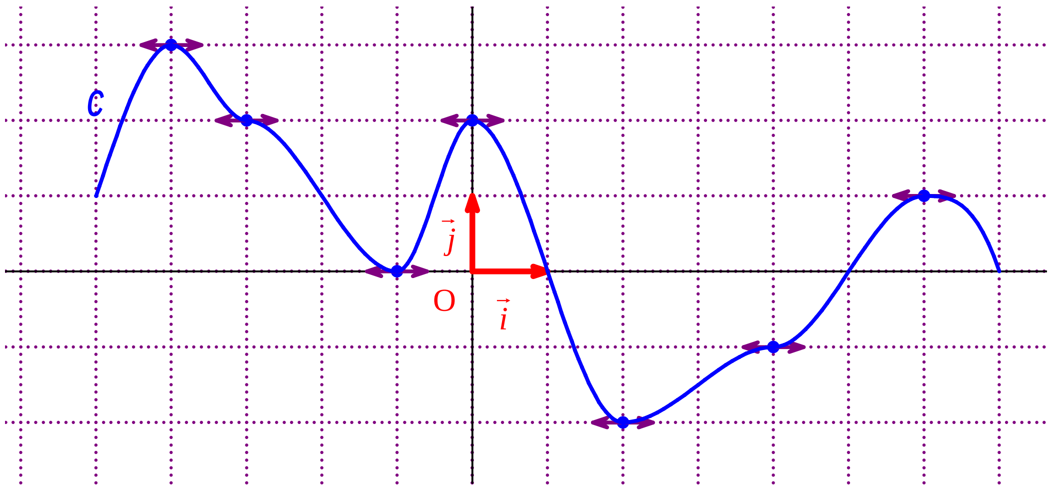
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On sait que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse – 3 est parallèle à la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

Que vaut $f'(-3)$?

2°) On considère la fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle [– 5 ; 7] dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée ci-dessous.

Les tangentes tracées sont des tangentes horizontales.



Dans un tableau, donner le signe de la dérivée, sans oublier de préciser les valeurs d'annulation.

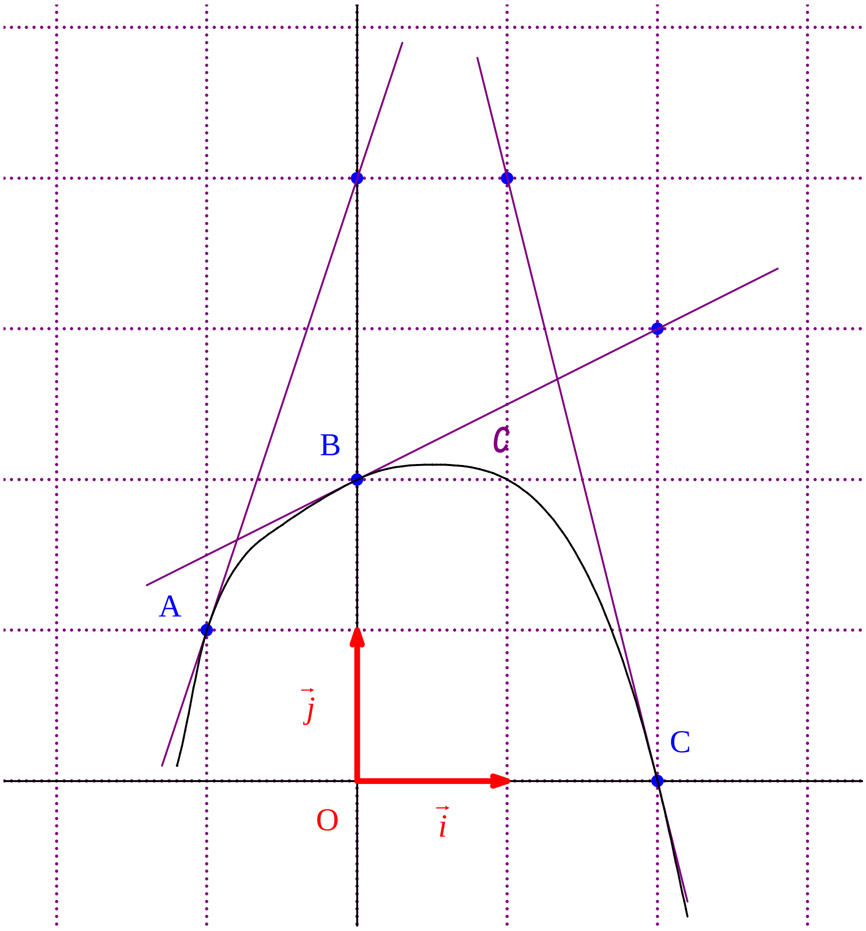
3°) À l'aide de la calculatrice (et uniquement avec la calculatrice), donner le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5}$ en 3. On admettra que ce nombre est la troncature du résultat affiché par la calculatrice.

4°) Donner la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^3}$ (résultat sous la forme la plus simple possible).

5°) Donner la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

IV. (1,5 points)

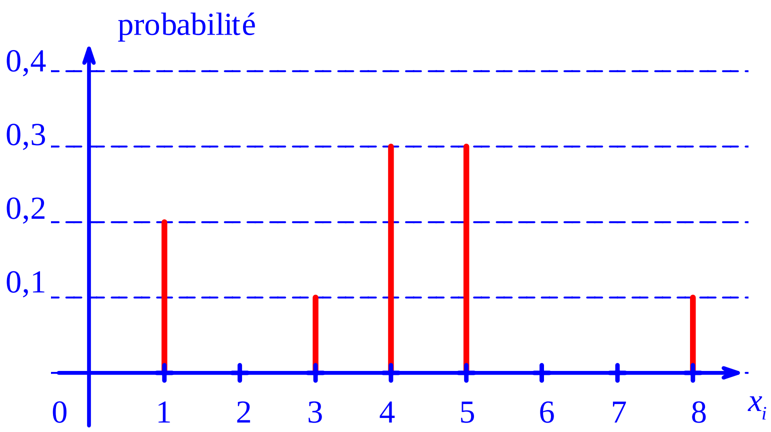
La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Sachant que les droites tracées sont les tangentes aux points A, B, C, lire graphiquement $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

V. (3 points)

On considère une variable aléatoire X réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, P).
La loi de probabilité de X est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous.



On admettra (sans avoir besoin de refaire les calculs) que l'espérance et la variance de X sont respectivement égales à 4 et à 3,8.

Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.

VI. (2 points)

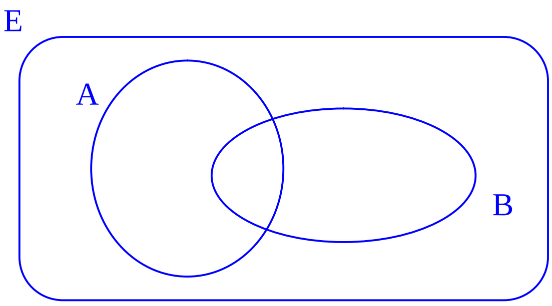
Une urne contenant n boules blanches et n boules noires (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).
On tire successivement au hasard deux boules de l'urne sans remise.

1°) Exprimer, en fonction de n, le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

2°) Exprimer, en fonction de n, la probabilité de tirer deux boules blanches.
Donner le résultat sous forme simplifiée.

VII. (2 points) Ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.



1°) Hachurer l'ensemble des éléments x de E vérifiant $x \in$ A et $x \notin$ B.

2°) Hachurer l'ensemble des éléments x de E vérifiant $x \notin$ A ou $x \notin$ B.

VIII. (2 points)

Les deux questions sont indépendantes (les sommes S et S ' n'ont pas de lien entre elles).

1°) On considère la somme

$$S = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 196 + 225$$

écrite en extension.

Écrire S au moyen du symbole Σ en utilisant la variable k.

Compléter $S = \sum_{k=1}^{k=\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots$ (il y a deux endroits à compléter).

2°) Calculer $S' = \sum_{k=2}^{k=6} (2k-1)$.

Feuille de réponses du contrôle du vendredi 6 janvier 2012

Prénom et nom : ……………………………………………………….

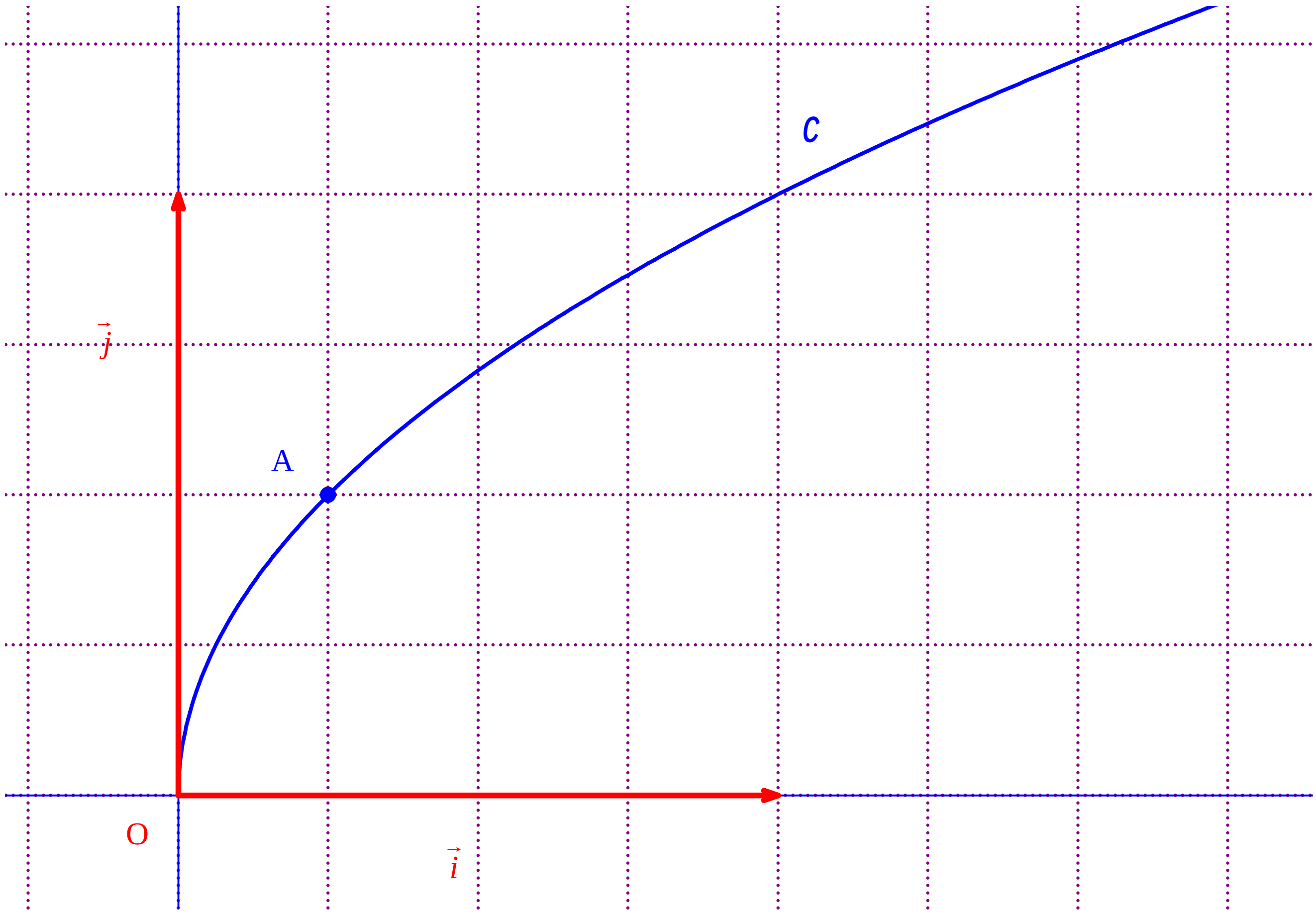
Note : ….. / 20

I. Dér. (2,5)	II. Dér. (3)	III. Dér. (5)	IV. Dér. (1,5)	V. Prob. (2)	VI. Prob. (2)	VII. Ens. (2)	VIII. Sommes (2)
………	………	………	………	………	………	………	………

I. (2,5 points)

1°) a) Équation réduite de T : ……………………………..

b) Tracé de T :



2°) Équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point quelconque d'abscisse $a > 0$: ……………………………

II. (3 points) Vrai ou faux ?

Questions	1°)	2°)	3°)	
Réponses	………	………	………	**Total : ………**

III. (5 points)

1°) $f'(-3) =$……….

2°)

x	
Signe de $f'(x)$	

3°) Le nombre dérivé de f en 3 est égal à ………… .

4°) $f'(x) =$……………………

5°) $f'(x) =$……………………

IV. (1,5 points)

$f'(-1) =$…………..	$f'(0) =$…………..	$f'(2) =$…………..

V. (2 points)

$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

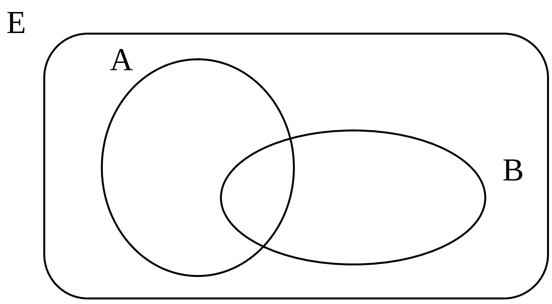
VI. (2 points)

1°) Le nombre de résultats possibles est égal à ………………...

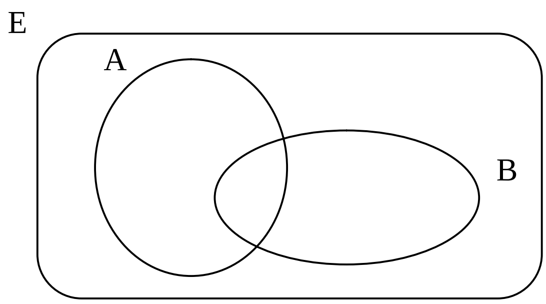
2°) La probabilité de tirer deux boules blanches est égale à ………………….. .

VII. (2 points)

1°) Ensemble des éléments x de E vérifiant
$x \in$ A et $x \notin$ B.



2°) Ensemble des éléments x de E vérifiant
$x \notin$ A ou $x \notin$ B.



VIII. (2 points)

1°) $S = \sum_{k=1}^{k=\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots$ (il y a deux « endroits » à remplir)

2°) $S' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Corrigé du contrôle du 6-1-2012

I. $f : x \mapsto \sqrt{x}$

On sait que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

1°) a) Déterminons une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.

Une équation de T s'écrit : $y=f'\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

On calcule à part :

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

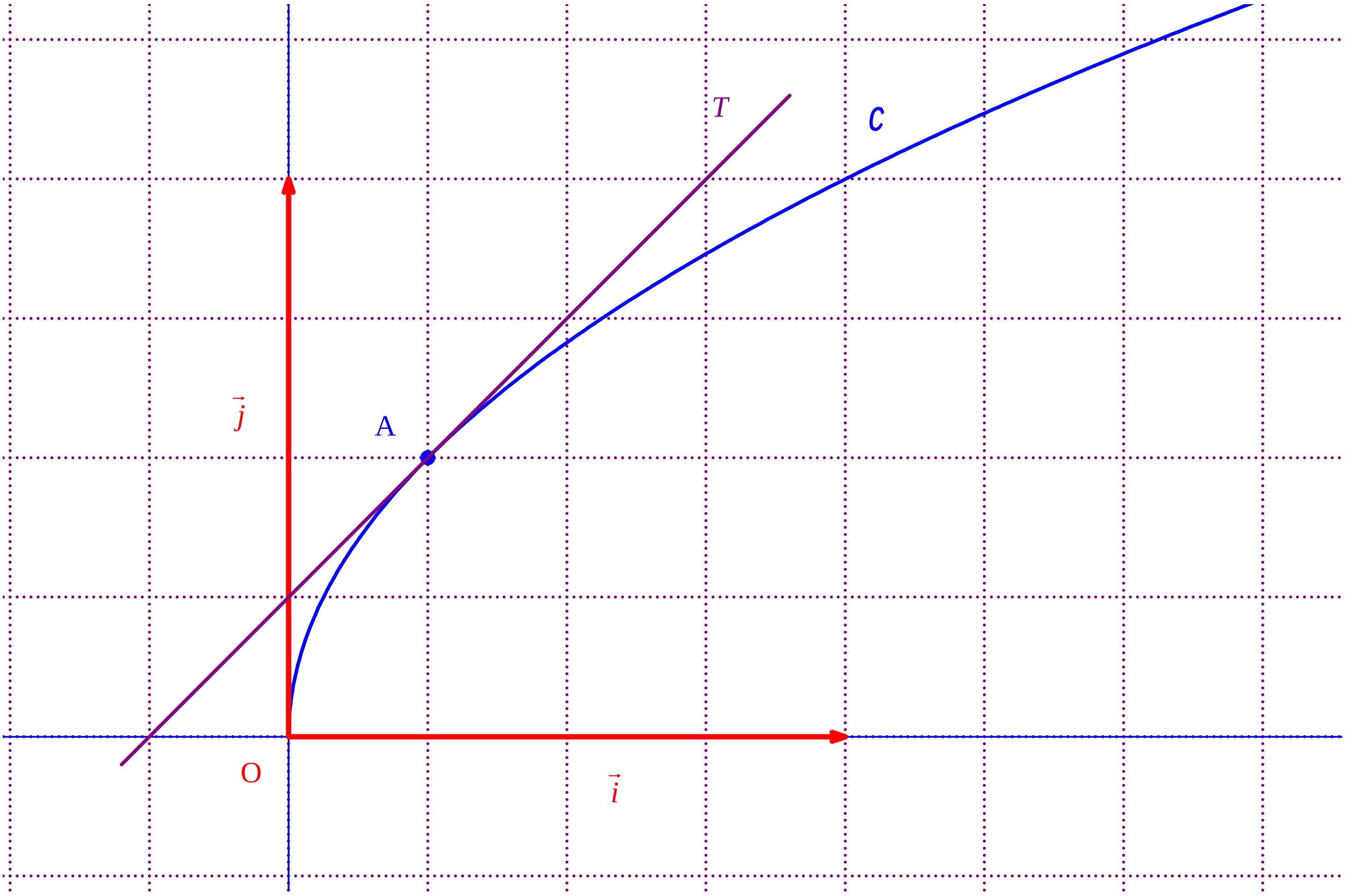
$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\times\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=1$$

Donc T a pour équation : $y=1\times\left(x-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$ soit $y=x+\dfrac{1}{4}$.

On peut vérifier ce résultat avec la calculatrice mais attention aux approximations commises par la calculatrice !

b) Pour le tracé de T sur le graphique, on peut, au choix :

- utiliser le coefficient directeur qui est de 1 : la tangente est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur 1.
- utiliser l'ordonnée à l'origine qui est égale à $\dfrac{1}{4}$: on place le point B de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$ et l'on joint ce point au point A.



c) Étudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

On étudie le signe de la différence $\sqrt{x}-\left(x+\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{x}-x-\dfrac{1}{4}=-\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}\right)=-\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

La difficulté était de penser à factoriser l'expression grâce à une identité remarquable, dans une situation qui n'est pas habituelle.

$\forall x\in[0\,;+\infty[\quad -\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$

Donc $\forall x\in[0\,;+\infty[\quad \sqrt{x}-\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\leqslant 0$ soit $\forall x\in[0\,;+\infty[\quad f(x)\leqslant x+\dfrac{1}{4}$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ est en dessous de T sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Ce résultat est confirmé par le graphique.

2°) Une équation de la tangente en un point d'abscisse $a>0$ s'écrit : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

On obtient : $y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)+\sqrt{a}$ soit $y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x-\dfrac{a}{2\sqrt{a}}+\sqrt{a}$.

Or $\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$.

Donc l'équation réduite de la tangente s'écrit $y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x-\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{a}$ soit $\boxed{y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}}$.

Une autre forme d'équation réduite était possible en donnant le résultat sous la forme $\boxed{y=\frac{x+a}{2\sqrt{a}}}$.

L'équation réduite d'une tangente commence toujours par $y=\ldots$

II. Vrai ou faux ?

$f : x \mapsto x^3-3x^2+3x+4$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de *f* dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

a. Pour tout réel *x*, $f'(x)=3(x-1)^2$. **V**

b. Il existe un seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 3. **F**

c. Il existe un seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est horizontale. **V**

Justifications :

a. $f(x)=x^3-3x^2+3x+4$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)&=3x^2-6x+3\\&=3\left(x^2-2x+1\right)\\&=3(x-1)^2\end{aligned}$$

b. Pour déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 3, on résout l'équation $f'(x)=3 \quad (1)$.

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$3x^2-6x+3=3$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-6)=0$

$x=0$ ou $x=6$

Il y a donc deux points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 3 (points d'abscisses 0 et 6).

c. Pour déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale, on résout l'équation $f'(x)=0 \quad (2)$.

L'équation (2) est successivement équivalente à :

$3(x-1)^2=0$

$(x-1)^2=0$

$x-1=0$

$x=1$

Il y a donc un seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est horizontale (point d'abscisse 1).

III.

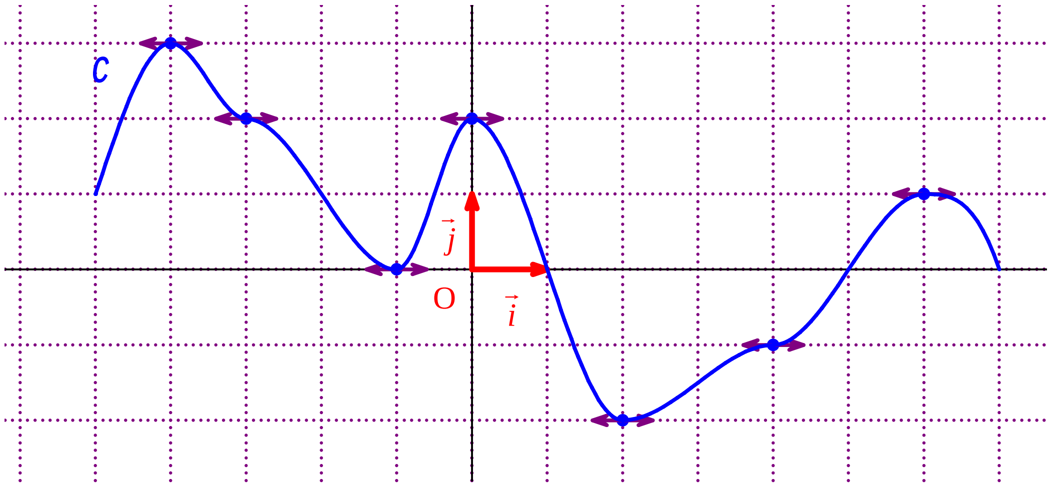
1°) $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse – 3.

Or cette tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 1 - 2x$.
Le coefficient directeur de cette droite est égal à – 2.

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées ont le même coefficient directeur.
Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse – 3 est égal à – 2.

$f'(-3) = -2$

2°)



D'après les tangentes horizontales tracées sur le graphique, la dérivée de *f* s'annule en – 4, – 3, – 1, 0, 2, 4 et 6.

On regarde ensuite les variations de la fonction pour connaître le signe de la dérivée.
On peut d'ailleurs commencer par faire le tableau de variations de la fonction *f* au brouillon.

x	– 5		– 4		– 3		– 1		0		2		4		6		7
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	–	0	+	0	–	0	+	0	+	0	–	

3°) Le nombre dérivé de *f* en 3 est égal à 1,5.

La calculatrice affiche 1,500000234. C'est évidemment une valeur approchée du nombre dérivé.
La valeur exacte est bien 1,5 (on peut le démontrer directement par un calcul de limite ; cela aurait pu faire un bonus).

4°) $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^3}$

Pour calculer le plus simplement possible la dérivée de *f* (il y a d'autres moyens mais plus compliqués qui nécessitent des simplifications), on effectue une réécriture qui consiste à « séparer » le 4 du quotient :

$f(x) = 4 \times \dfrac{1}{x^3}$

On applique la formule de dérivation : $(ku)' = ku'$ et la formule $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

$f'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{3}{x^4}\right)$

$f'(x) = -\dfrac{12}{x^4}$ (on obtient tout de suite le résultat simplifié)

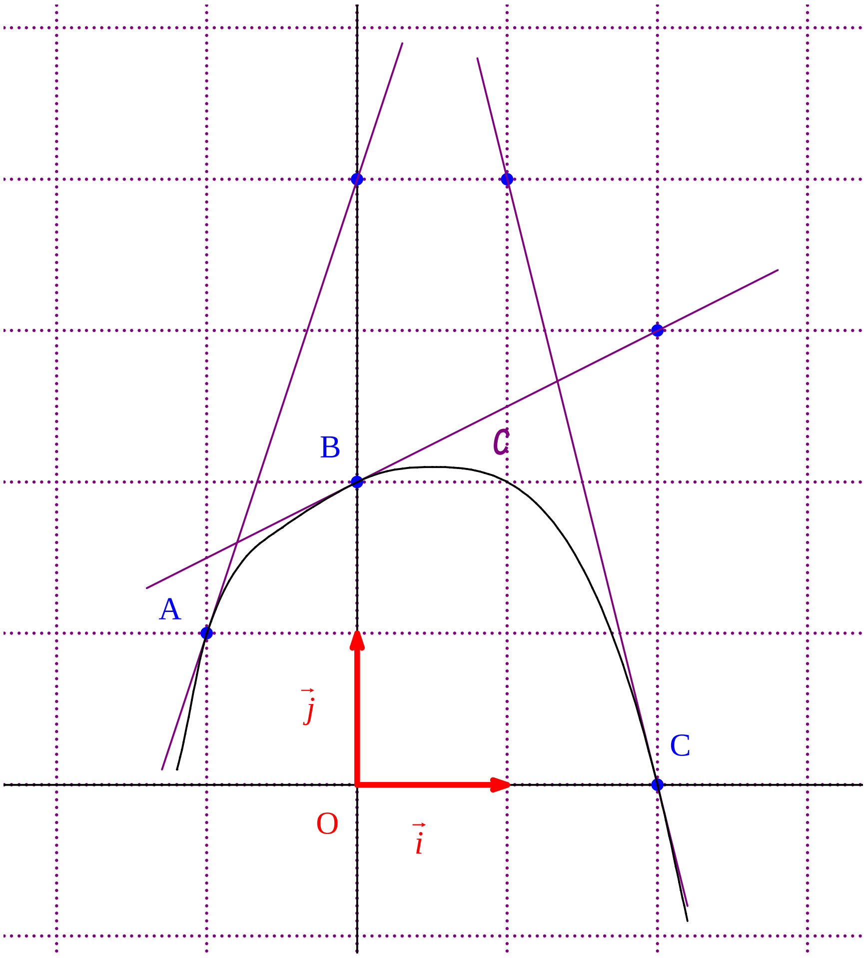
5°) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$

On applique la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x^2+1) - (x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas écrire $f'(x) = -\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$ comme je l'ai trouvé dans certaines copies.

IV.



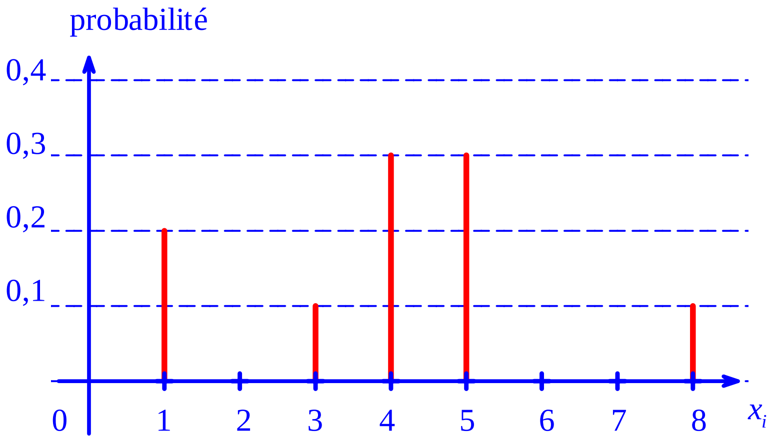
On lit les coefficients directeurs des tangentes aux points A, B, C.

$f'(-1)=3$

$f'(0)=\frac{1}{2}$

$f'(2)=-4$

V.



$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4$$
$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 3{,}8$$
$$\mathrm{Y} = 2\mathrm{X} + 1$$

Pour calculer l'espérance et la variance de Y, on applique les formules du cours rappelées dans l'encadré ci-dessous :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) &= a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b\\ \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= a^2\times\mathrm{V}(\mathrm{X})\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= 2\mathrm{E}(\mathrm{X})+1\\ &= 2\times 4+1\\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{Y}) &= 2^2\times\mathrm{V}(\mathrm{X})\\ &= 4\times 3{,}8\\ &= 15{,}2\end{aligned}$$

Complément :

Le diagramme en bâtons fourni dans l'énoncé nous montre que X peut prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 8$.

On peut ensuite dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	1	3	4	5	8	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	Total $= 1$

Il peut être intéressant, à titre d'entraînement, de calculer les indicateurs donnés dans l'énoncé (ce n'était pas demandé lors du contrôle).

$$\begin{aligned}E(\mathrm{X}) &= \sum_{i=1}^{i=5} x_i\times P(\mathrm{X}=x_i)\\ &= 1\times 0{,}2+3\times 0{,}1+4\times 0{,}3+5\times 0{,}3+8\times 0{,}1\\ &= 4\end{aligned}$$

$$V(\mathrm{X})=\left(\sum_{i=1}^{i=5}(x_i)^2\times P(\mathrm{X}=x_i)\right)-\left[E(\mathrm{X})\right]^2$$
$$=\left(1^2\times 0,2+3^2\times 0,1+4^2\times 0,3+5^2\times 0,3+8^2\times 0,1\right)-4^2$$
$$=19,8-16$$
$$=3,8$$

Autre méthode très laborieuse pour les élèves qui ne connaissent pas le cours :

● Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de Y.

y_i	3	7	9	11	17	
$P(\mathrm{Y}=y_i)$	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	Total $=1$

● Faire les calculs des paramètres de Y (attention aux valeurs approchées qui peuvent conduire à des résultats légèrement différents de ceux obtenus en utilisant les propriétés sur l'écart-type et la variance).

VI. Probabilités

urne | n boules blanches
| n boules noires

(C'est évidemment le même n pour les deux, on ne se pose même pas la question !.)

L'urne contient donc $n+n=2n$ boules au total.

On tire successivement au hasard deux boules sans remise.

1°) En utilisant la méthode des cases, on obtient que le nombre de résultats possibles est égal à $2n\times(2n-1)$.

2°) Probabilité de tirer deux boules blanches

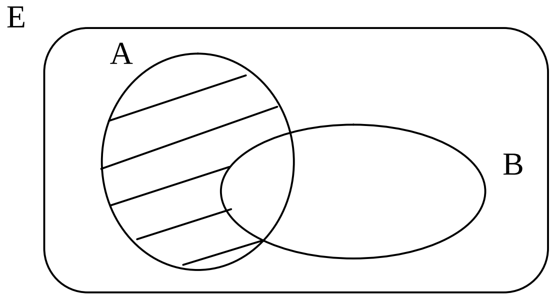
Le nombre de tirages constitués de deux boules blanches est égal à $n\times(n-1)$.

D'après la formule de Laplace, la probabilité de tirer deux boules blanches est donc égale à :

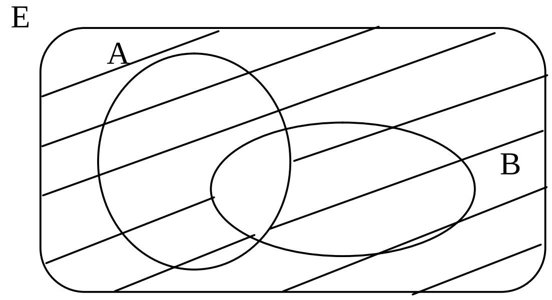
$$\frac{\cancel{n}(n-1)}{2\cancel{n}(2n-1)}=\frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

VII. Ensembles

1°) Ensemble des éléments x de E vérifiant
$x \in$ A et $x \notin$ B.



2°) Ensemble des éléments x de E vérifiant
$x \notin$ A ou $x \notin$ B.



1°) L'ensemble hachuré est A \ B (A privé de B).

2°) La proposition « $x \notin$ A ou $x \notin$ B » est la négation de la proposition « $x \in$ A et $x \in$ B ».

L'ensemble hachuré est le complémentaire de A $\cap$ B dans E.

VIII.

1°) $S = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 196 + 225$

La suite des nombres qui intervient dans cette somme est la suite des carrés parfaits (carrés d'entiers naturels).

On peut donc commencer par faire une phase de réécriture :

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 15^2.$$

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=1}^{k=15} k^2$.

2°) $S' = \sum_{k=2}^{k=6} (2k - 1)$

Pour le calcul de cette somme, on remplace successivement k par 2, 3, 4, 5, 6.

$$\begin{aligned} S' &= (2\times 2-1)+(2\times 3-1)+(2\times 4-1)+(2\times 5-1)+(2\times 6-1) \\ &= 3+5+7+9+11 \\ &= 35 \end{aligned}$$