1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 16 décembre 2011 (1 h 30)

Note :

…… /40 = **…… /20**

Prénom et nom : ……………………………………………………

I. Cours (3)	II. Dém. (3)	III. Dér. (4)	IV. Dér. (3)	V. Dér. (7)	VI. Dér. (7)	VII. Dér. (4)	VIII. Prob. (4)	IX. Log. (3)	X. Algo. (2)
………	………	………	………	………	………	………	………	………	………

I. (3 points) Questions de cours (définitions, propriétés, formules)

1°) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, P).
Soit a et b deux réels quelconques.

Compléter les formules suivantes concernant l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $aX + b$:

$E(aX + b) =$ ……………………… $\sigma(aX + b) =$ …………………………….

2°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
On suppose que f est dérivable en un réel a de I.

Compléter la définition précise de la tangente en un point :

La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a est …………………………………………………………………………

……......

II. (3 points) Démonstration de cours guidée

Dans la démonstration que l'on demande de faire, on s'appuiera sur la définition rappelée ci-dessous.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel fixé dans I.
On rappelle que « f est dérivable en a » signifie que le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ; dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Le but de ce qui suit est de démontrer le résultat relatif au nombre dérivé de la somme de deux fonctions dérivables en un réel.

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et dérivables en un réel $a \in$ I.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$.

1°) Soit h un réel non nul tel que $a + h \in$ I.

Vérifier que l'on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ (1).

………...

………...

2°) Compléter les égalités :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ = ……….. (car u est dérivable en ……..)

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ = ……….. (car v est dérivable en ……..)

3°) On admet que la limite d'une somme est égale à la somme des limites.

En utilisant l'égalité (1), déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; en déduire que f est dérivable en a et donner $f'(a)$.

………...

………...

………...

………...

………...

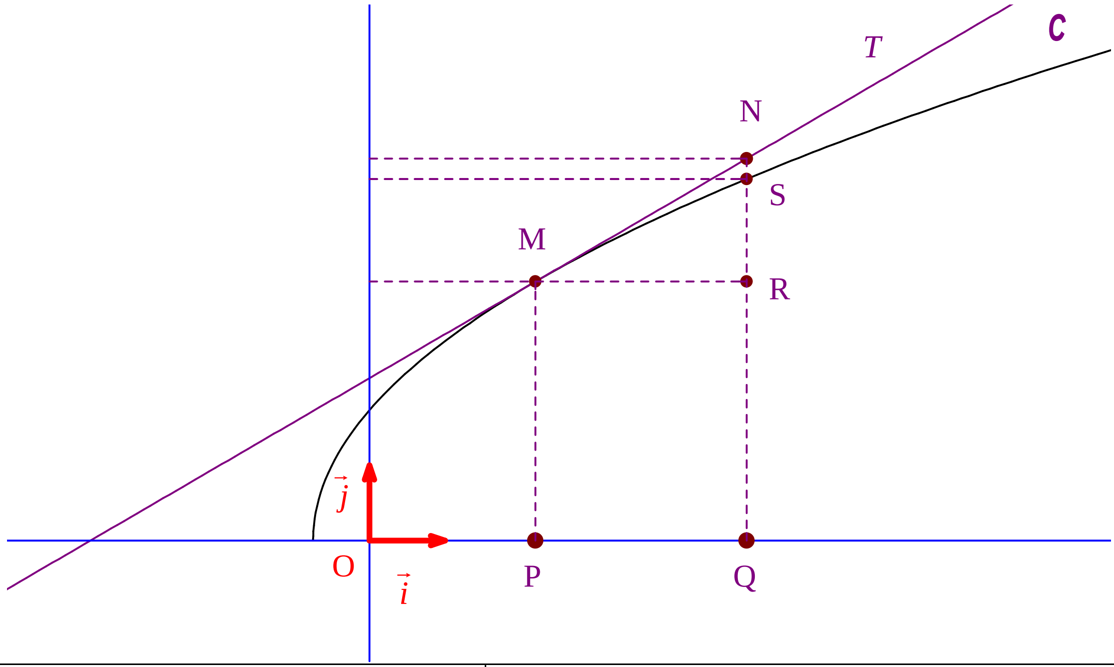
………...

III. (4 points) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit a un réel fixé dans I en lequel f est dérivable et h un réel non nul tel que $a + h$ appartienne à I.
On donne les informations suivantes :

✶ Les points M et S appartiennent à $\mathcal{C}$ et ont pour abscisses respectives a et $a + h$.
✶ T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point M.
✶ N appartient à T.
✶ Les points P et Q appartiennent à l'axe des abscisses et ont pour abscisses respectives a et $a + h$.
✶ Les points N, S, R, Q ont la même abscisse.

Dans cet exercice, on demande uniquement des expressions littérales.



1°) Donner l'ordonnée du point S.	…………………………………………….…………..
2°) Donner les coordonnées de R	…………………………………………….…………..
3°) Donner une équation de *T*.	…………………………………………….…………..
4°) Donner l'ordonnée du point N.	…………………………………………….…………..

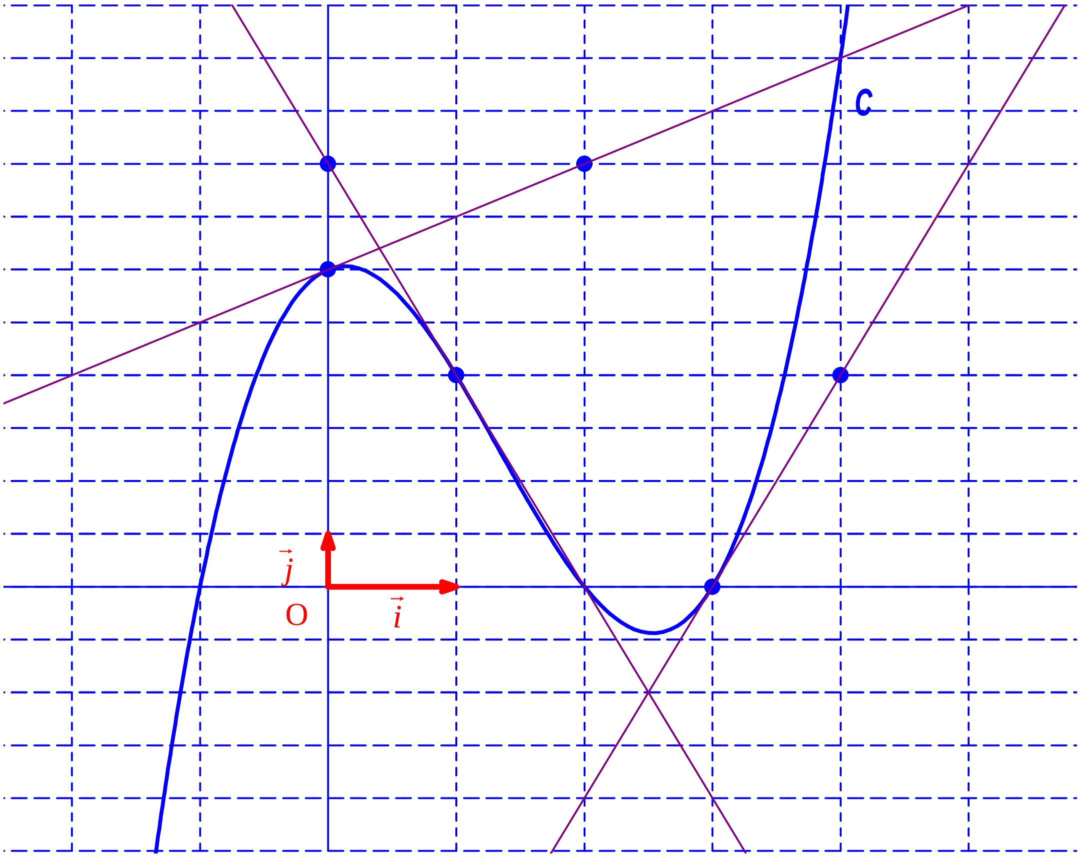
IV. (3 points) On donne ci-après la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

On a tracé les tangentes en quelques points.
Les points marqués sont à coordonnées entières.

Compléter directement les égalités ci-dessous :

$f'(0) =$ …………..	$f'(1) =$ …………..	$f'(3) =$ …………..

Il est demandé de ne rien écrire sur le graphique.



V. (7 points) On considère la fonction $f : x \mapsto -2x^3 + 6x^2 - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f\,'(x)$. Écrire un seul résultat en mettant la forme qui sera utilisée dans la question 2°).

$f\,'(x)$ = ………………………………………………………

2°) Compléter le tableau suivant comprenant l'étude du signe de $f\,'(x)$ et les variations de f.

Quelques recommandations :

- Compléter le tableau avec les extremums locaux (calculés au brouillon).
- Ne pas oublier de préciser les valeurs d'annulation de la dérivée.
- Faire les traits de séparation et les flèches de variation à la règle.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$

VI. (7 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$.

1°) Calculer $f\,'(x)$. Écrire un seul résultat en mettant la forme qui sera utilisée dans la question 2°).

$f\,'(x) =$ ………………………………………………………

2°) Compléter le tableau suivant comprenant l'étude du signe de $f\,'(x)$ et les variations de f.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$

VII. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation cartésienne $5x - 4y + 3 = 0$. Expliquer la démarche en tâchant d'être le plus rigoureux possible.

On conclura ainsi : « La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à Δ aux points d'abscisses ……… . »

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

VIII. (4 points) Une urne contient six boules noires et n boules blanches (n entier supérieur ou égal à 2).
Un jeu consiste à tirer successivement au hasard, sans remise, deux boules de l'urne.
Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne un euro ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd un euro.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante.

« Le nombre de tirages possibles est égal à ………………………….. (le résultat dépend de n) ».

2°) Donner l'espérance de X en fonction de n sous la forme d'un seul quotient.

E(X) = …………………………………………

3°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu est équitable (recherche au brouillon).

Le jeu est équitable pour ………………………………………………………..…………

IX. (3 points) Logique (les deux questions sont indépendantes)

1°) On considère la proposition P portant sur une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: « Pour tout réel x, $f(x) > 0$ ».

Quelle(s) est (sont) la (les) proposition(s) qui exprime(nt) la négation de P ? Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

☐ « Pour tout réel x, $f(x) < 0$ ».

☐ « Il existe un réel x tel que $f(x) < 0$ ».

☐ « Pour tout réel x, $f(x) \leqslant 0$ ».

☐ « Pour tout réel x, $f(x) \neq 0$ ».

☐ « Il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 0$ ».

2°) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier

Q : « Il existe deux réels x et y strictement inférieurs à 1 tels que $xy > 1$ ».

La proposition Q est …………………………...

Justification : ..…………………………………………………………………………………………...

………...

X. (2 points) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel.

Variables :
i, n : entiers naturels supérieurs ou égaux à 1
S : réel

Entrées :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n (avec un pas de 1) **Faire**
 S prend la valeur $S + \frac{1}{i}$
FinPour

Sortie :
Afficher S

1°) Exécuter cet algorithme « à la main » pour $n = 4$ et compléter la phrase suivante sans justifier.

Pour $n = 4$, le nombre de sortie est égal à ………………..

(donner un seul résultat sous forme de fraction irréductible).

2°) Dans le cas général, pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, écrire le nombre de sortie en fonction de n en utilisant le symbole Σ (symbole de sommation).

Pour n entier naturel quelconque, $n \geqslant 1$, le nombre de sortie est égal à ……………….. .

3°) **Question bonus**

Programmer cet algorithme sur la calculatrice.
Faire tourner ce programme et vérifier le résultat de la question 1°).
Écrire le nombre de sortie affiché par la calculatrice pour $n = 100$, puis pour $n = 1000$.

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Bonus (indépendant du reste) :

Le mathématicien Srinivisa Ramanujan (1887-1920) est considéré comme l'un des plus grands spécialistes en théorie des nombres du XX^{e} siècle. On lui attribue le résultat suivant :

« L'entier 1 729 est le plus petit entier naturel à pouvoir se décomposer en somme de deux cubes (d'entiers) de deux façons différentes ».

On va vérifier à l'aide d'un algorithme que le nombre 1 729 se décompose bien de deux façons différentes en somme de deux cubes.
On cherche donc tous les entiers naturels p et q tels que l'on ait $p^3 + q^3 = 1\,729$.

Limitation de l'ensemble des solutions

Si un couple (p, q) d'entiers naturels est solution, chacun des deux entiers p et q a un cube qui ne peut pas dépasser 1 729. Or, on vérifie que $12^3 = 1728$.
Chacun de ces nombres est donc inférieur ou égal à 12.

Algorithme

On va utiliser l'algorithme ci-dessous pour résoudre l'équation ; cet algorithme est basé sur une méthode de balayage.

Question :

Programmer cet algorithme sur calculatrice ; en déduire deux décompositions de 1 729 en somme de deux cubes d'entiers.

Variables :

p, q : entiers naturels

Traitement et sorties :

Pour p allant de 0 à 12 (avec un pas de 1) **Faire**
    Pour q allant de 0 à 12 (avec un pas de 1) **Faire**
        Si $p^3 + q^3 = 1\,729$, alors
            Afficher p, q
        FinSi
    FinPour
FinPour

………...

………...

Corrigé du contrôle du 16 décembre 2011

I. Questions de cours

1°) $\text{E}(a\text{X} + b) = a\,\text{E}(\text{X}) + b$ $\sigma(a\text{X} + b) = |\,a\,|\,\sigma(\text{X})$

2°) La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f\,'(a)$.

II.

1°)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\left[u(a+h)+v(a-h)\right]-\left[u(a)+v(a)\right]}{h}$$

$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

2°)

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$$ (car u est dérivable en a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$$ (car v est dérivable en a)

3°) En utilisant l'égalité (1) et le principe de calcul de la limite d'une somme, on peut écrire :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$$

Comme $u'(a) + v'(a)$ est un réel, on en déduit que f est dérivable en a et que $f\,'(a) = u'(a) + v'(a)$.

Quelques remarques :

• **À propos du 1°) :**
On est dans le cadre abstrait d'une démonstration générale.
Dans ce cadre, on ne peut observer un « évanouissement » des h comme pour le cas des fonctions polynômes ou rationnelles.

• **À propos du 2°) et du 3°) :**
Pour les limites, il est hors de question de remplace h par 0 dans les expressions.
En effet, les diverses expressions sont définies pour $h \neq 0$.

III.

1°) Donner l'ordonnée du point S.	$f\,(a+h)$
2°) Donner les coordonnées de R	$(a+h\,;f\,(a))$
3°) Donner une équation de *T*.	$y=f\,'\,(a)\,(x-a)+f\,(a)$
4°) Donner l'ordonnée du point N.	$h\,f\,'\,(a)+f\,(a)$

Explications :

1°) $x_S=a+h$; or S $\in \mathcal{C}$ donc $y_S=f\,(a+h)$.

2°) Le point R a pour abscisse $a+h$.
On a : $y_R=y_M=f\,(a)$.

3°) Formule de cours (équation d'une tangente)

4°) Le point N a pour abscisse $a+h$.
N $\in T$ donc $y_N=f\,'\,(a)\,(x_N-a)+f\,(a)$

$=f\,'\,(a)\,(a+h-a)+f\,(a)$

$=f\,'\,(a)\times h+f\,(a)$

$=h\,f\,'\,(a)+f\,(a)$

IV. Lectures graphiques de nombres dérivés

$f\,'\,(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Pour cet exercice, on doit juste lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente.
On ne demande pas de donner les équations réduites des tangentes.

On tient compte des unités indiquées sur chaque axe du repère orthogonal.

$f\,'\,(0)=1$	$f\,'\,(1)=-4$	$f\,'\,(3)=4$

V. Étude des variations d'une fonction polynôme

$f : x \mapsto -2x^3 + 6x^2 - 3$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) Calcul de $f\,'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car comme fonction polynôme.

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f\,'(x) = -6x^2 + 12x = 6x(-x+2)$ (on donne le résultat sous forme factorisée car c'est celle qui va nous servir pour le 2°))

2°) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $6x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\ +$	
Variations de f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	

$f(0) = -3$

$f(2) = 5$

On vérifie avec la calculatrice graphique.

VI. Étude des variations d'une fonction rationnelle

$f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

1°) Calcul de $f\,'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ comme fonction rationnelle.

Pour calculer la dérivée, on utilise la formule de dérivation d'un quotient.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f\,'(x) = \frac{(6x+4)\left(x^2-1\right)-\left(3x^2+4x-3\right)\times 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{6x^3-6x+4x^2-4-\left(6x^3+8x^2-6x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{-4x^2-4}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{-4\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$ (cette étape de factorisation n'est pas du tout indispensable pour la suite)

2°) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $-4x^2-4$		$-$		$-$		$+$	
SGN de $\left(x^2-1\right)^2$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
SGN de $f\,'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
Variations de f		$\searrow$	‖	$\searrow$	‖	$\searrow$	

Il n'y a pas d'extremum à calculer.
f est strictement décroissante sur tous les intervalles qui constituent l'ensemble de définition de f.

On vérifie avec la calculatrice graphique.
Il est anormal d'avoir un tableau de variations faux.

Attention, l'expression x^2+1 ou $-4x^2-4$ selon que l'on a factorisé ou non le numérateur de $f\,'(x)$, ne peut se factoriser en produit de deux facteurs du premier degré (x^2+1 est la somme de deux carrés, non factorisable en produit de deux facteurs du premier degré, à ne pas confondre avec x^2-1 qui lui est factorisable en produit de facteurs du premier degré).

VII. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

C : courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Déterminons les abscisses des points de **C** en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation cartésienne $5x - 4y + 3 = 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + 1$

Δ a pour équation réduite $y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}$.

Le coefficient directeur de Δ est donc égal à $\dfrac{5}{4}$.

Pour connaître le coefficient directeur de Δ, on est obligé de repasser l'équation cartésienne en équation réduite.

Or deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

On résout l'équation $f'(x) = \dfrac{5}{4}$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x^2 + 1 = \dfrac{5}{4}$

$x^2 = \dfrac{1}{4}$

$x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

La courbe **C** admet une tangente parallèle à la droite Δ aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$.

VIII.

1°) Il s'agit de tirages successifs <u>sans remise</u> de deux boules.

Au départ, l'urne contient 6 boules noires et *n* boules blanches : il y a donc *n* + 6 boules au total.

Lors du premier tirage, il y a *n* + 6 possibilités (car l'urne contient *n* + 6 boules).
Lors du deuxième tirage, il y a *n* + 5 possibilités (car la première boule n'est pas remise dans l'urne, il y a donc une boule de moins dans l'urne).

On multiplie les deux résultats précédents (méthode des cases ou méthode des « boîtes »).

Le nombre de tirages possibles est égal à (n + 6) (n + 5).

Il n'y avait pas forcément besoin de développer le résultat à ce stade (cf. question 2°).

2°) Calculons l'espérance de X en fonction de n.

Méthode : On commence par établir la loi de probabilité de X.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P.
X peut prendre les valeurs $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$.

P (X = x_1) = P (« obtenir deux boules de la même couleur »)

Calculons le nombre de tirage constitués de deux boules de la même couleur.
On effectue une disjonction de cas :
soit les deux boules sont toutes les deux noires soit les deux boules sont toutes les deux blanches.

Nombre de tirages pour lesquels les deux boules sont noires : $6 \times 5 = 30$.

Nombre de tirages pour lesquels les deux boules sont blanches : $n\,(n-1)$.

Donc le nombre de tirages pour lesquels les deux boules sont de la même couleur est égal à :

$30 + n\,(n-1) = n^2 - n + 30$

$$P\,(X = x_1) = \frac{n^2 - n + 30}{(n+6)(n+5)}$$

P (X = x_2) = P (« obtenir deux boules de couleurs différentes »)

Calculons le nombre de tirage constitués de deux boules de couleurs différentes.

On effectue une disjonction de cas :
- soit la première est noire et la deuxième est blanche
- soit la première est blanche et la deuxième est noire.

Nombre de tirages pour lesquels la première est noire et la deuxième est blanche : $6 \times n$.

Nombre de tirages pour lesquels la première est blanche et la deuxième est noire : $n \times 6$.

Donc le nombre de tirages pour lesquels les deux boules sont deux boules de couleurs différentes est égal à $6n + 6n = 12n$.

$$P\,(X = x_2) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

La loi de probabilité de X est donc donnée dans le tableau :

x_i	1	– 1	
$P\left(X=x_i\right)$	$\dfrac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$	$\dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$	Total =1

Autre façon de calculer P (X = x_2) :

$$P\ (X = x_2) = 1 - P(X = x_1) = 1 - \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)} = \ldots = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= x_1 \times P\ (X = x_1) + x_2 \times P\ (X = x_2) \\
&= 1\times\frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}+(-1)\times\frac{12n}{(n+6)(n+5)} \\
&= \frac{n^2-n+30-12n}{(n+6)(n+5)} \\
&= \frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}
\end{aligned}$$

3°) Déterminons pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu est équitable.

Le jeu est équitable si et seulement si E(X) = 0

si et seulement si $\dfrac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)} = 0$

si et seulement si $n^2-13n+30 = 0$

si et seulement si n = 3 ou n = 10 *

* On obtient ces racines très facilement en considérant le polynôme $x^2-13x+30$.

IX. Logique

1°) P : « Pour tout réel x, $f(x) > 0$ »

La négation de P est exprimée par « Il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 0$ ».

Il y avait donc une seule proposition à choisir.

Rappel :

La négation d'une proposition du type :

« **Pour tout** élément x d'un ensemble E, x **satisfait** à une condition C »
est :
« **Il existe** un élément x de E qui **ne satisfait pas** la condition C ».

2°) La proposition Q : « Il existe deux réels x et y strictement inférieurs à 1 tels que $xy > 1$ » est vraie.

En effet, pour $x = -2$ et $y = -1$.
On a $x < 1$ et $y < 1$.
Or $xy = 2$ donc $xy > 1$.

Pour démontrer qu'une proposition du type : « **Il existe …** » est vraie, on donne un exemple.

Plusieurs élèves ont déclaré que la proposition Q était fausse : en effet, ils ont observé qu'il existe des réels x et y strictement inférieurs à 1 tels que $xy \leqslant 1$ (exemple facile à trouver).
Cet argument permet seulement de dire que la proposition :

« Pour tous réels x et y strictement inférieurs à 1, $xy > 1$ » est fausse.

X. Étude d'un algorithme de calcul de somme

Variables :
i, n : entiers naturels supérieurs ou égaux à 1
S : réel

Entrées :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n (avec un pas de 1) **Faire**
    S prend la valeur $S + \dfrac{1}{i}$
FinPour

Sortie :
Afficher S

1°) Exécutons cet algorithme « à la main » pour $n = 4$.

L'algorithme comporte une boucle « Pour ».

Pour $n = 4$, i va varier entre 1 et 4.

i est le **compteur** de la boucle.

On va suivre l'évolution de la variable S au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme.

***i* = 1.** Valeur de S après le 1^er^ passage dans la boucle : $0+\dfrac{1}{1}=1$

***i* = 2.** Valeur de S après le 2^e^ passage dans la boucle : $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

***i* = 3.** Valeur de S après le 3^e^ passage dans la boucle : $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$

***i* = 4.** Valeur de S après le 4^e^ passage dans la boucle : $\dfrac{11}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{12}$

On reprend chaque fois la valeur de S calculée précédemment.

Pour $n = 4$, le nombre de sortie (valeur de S obtenue à la fin de la boucle) est égal à $\dfrac{25}{12}$.

2°) **Cas général : *n* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1**

Pour $n \geqslant 1$, le nombre de sortie est une somme (d'où le titre) égale à $1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ (somme écrite en extension).

En utilisant le symbole Σ, on peut écrire :

Pour $n \geqslant 1$, le nombre de sortie est égal à $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i}$.

Attention à bien respecter les modalités d'écriture d'une somme avec le symbole Σ.

$i = 1$ (plus petite valeur de i) « en bas »

$i = n$ (plus grande valeur de i) « en haut »

Pour écrire cela, on peut s'appuyer sur le cas $n = 4$ qui a été traité à la question 1°).

***i* = 1.** Valeur de S après le 1^er^ passage dans la boucle : $0+\dfrac{1}{1}=1$

***i* = 2.** Valeur de S après le 2^e^ passage dans la boucle : $1+\dfrac{1}{2}$

***i* = 3.** Valeur de S après le 3^e^ passage dans la boucle : $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

***i* = 4.** Valeur de S après le 4^e^ passage dans la boucle : $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

La valeur de S affichée en sortie est égale à $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$ soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{i}$.

Une fois que l'on a compris cela, on généralise de manière quasi évidente.

Remarque :

Si on initialise la valeur de S à 2 (par exemple), le nombre de sortie (valeur de S finale) est égal à $2+\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i}$.

3°) **Question bonus**

On vérifie aisément le résultat de la question 1°) ; la calculatrice affiche cependant une valeur décimale approchée du résultat exact qui a été trouvé en faisant tourner l'algorithme « à la main ».

Pour n = 100, le nombre affiché en sortie par la calculatrice est : 5,187377518.

Pour n = 1 000, le nombre affiché en sortie par la calculatrice est : 7,48547861.

La calculatrice donne évidemment des valeurs approchées des résultats.

Bonus :

En programmant cet algorithme sur calculatrice, on obtient les couples solutions suivants :

(1 ; 12), (12 ; 1), (9 ; 10), (10 ; 9).

Ainsi, on en déduit deux décompositions de 1 729 en somme de deux cubes d'entiers :

1 729 = 1^3+12^3 et 1 729 = 10^3+9^3.

On peut vérifier que ces deux décompositions sont bien justes en faisant le calcul.

Programme pour calculatrice TI :

```
: For (P,0,12)
: For (Q,0,12)
: If P³+Q³ = 1 729
: Then
: Disp P
: Disp Q
: End
: End
: End
```