Exercices sur les relations de comparaison sur les suites

1 Soit (u_n) la suite dont la succession de valeurs est une fois 1, deux fois 2, trois fois 3 etc… ($u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = 2$, $u_3 = u_4 = u_5 = 3$…).

1°) Déterminer la limite de (u_n).

2°) Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers + ∞.

2 1°) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet une seule solution dans l'intervalle $]0\,;1[$. On note x_n cette solution.

2°) Étudier la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.

3°) Démontrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$.

4°) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \mathrm{e}^{-n}$ lorsque n tend vers + ∞.

3 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Démontrer que (u_n) admet une limite (finie ou infinie) et la déterminer.

2°) a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\ln x \leqslant x$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a : $u_n \leqslant \ln(2n)$.

c) Démontrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

d) Démontrer que $u_n - \ln n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

4 Soit a un réel strictement positif.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'équation $x^n = a(1-x)$ d'inconnue $x \in]0\,;1[$ possède une et seule solution que nous noterons u_n.

2°) Étudier la monotonie de (u_n) puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3°) On pose $v_n = 1 - u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -v_n$.

b) Démontrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.

c) En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

5 1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'équation $\ln x + n = x$ d'inconnue $x \in]0\,;1]$ admet une unique solution que nous noterons x_n.

2°) Étudier la monotonie de (u_n) puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels. Pour tout entier naturel *n*, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$.

1°) Soit *n*, *p*, *q* trois entiers naturels tels que $p<n<q$.

Démontrer que l'on a : $\dfrac{S_q-S_n}{q-n}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{S_n-S_p}{n-p}$.

2°) Soit λ un réel strictement positif. Déterminer la limite de $\dfrac{n}{\mathrm{E}\left(n\lambda\right)}$.

3°) Dans toute la suite, on suppose toujours que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On suppose de plus que tous les termes sont positifs ou nuls et que $S_n\sim 2\sqrt{n}$ en + ∞.

Le but est de démontrer que a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Déterminer la limite de $\dfrac{S_{\mathrm{E}(n\lambda)}}{\sqrt{n}}$ pour λ réel strictement positif.

Soit α et β deux réels tels que $0<\alpha<1<\beta$.

Démontrer que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier naturel n_0 tel que $n\geqslant n_0$ implique

$$\frac{2\left(\sqrt{\beta}-1\right)}{\beta-1}-\varepsilon\leqslant a_n\sqrt{n}\leqslant\frac{2\left(1-\sqrt{\alpha}\right)}{1-\alpha}+\varepsilon .$$

Conclure.

Réponses

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1°) Utiliser une fonction extractrice $\varphi(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut aussi dire que la suite (u_n) est une suite croissante non majorée.

2°) $u_{\varphi(n)} \sim n \qquad u_n \sim \varphi^{-1}(n)$

On cherche n tel que $N=\dfrac{n(n+1)}{2}$ soit $2N=n^2+n$.

$$n=\frac{\sqrt{1+8N}-1}{2}$$

Mieux, on pose $\varphi(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$.

$\varphi^{-1}(x) \sim \sqrt{2x}$ en $+\infty$

$$u_n \sim \sqrt{2n}$$

Version d'après le corrigé du livre :

$$u_{\sum\limits_{k=1}^{r-1} k}=r$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{u_n-1} k \leqslant n \leqslant \sum_{k=1}^{u_n} k$ soit $u_n(u_n-1)\leqslant 2n \leqslant u_n(u_n+1)$

$$2n \sim {u_n}^2$$

$$u_n \sim \sqrt{2n}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

1°) $f : x \mapsto x-\ln x$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

f est strictement décroissante sur $]0\,;1[$.

On fait un tableau de variation.

2°) Étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

$$x_{n+1}<x_n$$

(x_n) est strictement décroissante et minorée par 0 donc (x_n) converge vers une limite $\mathfrak{l} \in [0\,;1]$.

Supposons que $\mathfrak{l} > 0$.

$$\ln x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln \mathfrak{l}$$

$$\ln\left(\underbrace{x_n - \ln x_n}_{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathfrak{l} - \ln \mathfrak{l}$$

$$\downarrow$$

$$+\infty$$

On en déduit que $\mathfrak{l} = 0$.

3°) Démontrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$.

Version écrite par un élève :

$$x_{n+1} - x_n = \ln x_{n+1} + n + 1 - \ln x_n - n$$

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} + 1$$

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{<0} \Rightarrow \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} < -1$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} < \frac{x_n}{\mathrm{e}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < \dfrac{x_0}{\mathrm{e}^n}$.

Or $0 < x_n$.

$$\Rightarrow \ 0 < x_n < \mathrm{e}^{-n} x_0$$

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$$

3°) Démontrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$.

4°) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \mathrm{e}^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a $x_n = \mathrm{e}^{x_n - n}$.

$$x_n - \mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{x_n - n} - \mathrm{e}^{-n}$$

$$= \mathrm{e}^{-n}\left(\mathrm{e}^{x_n} - 1\right)$$

$x_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$ donc $x_n - \mathrm{e}^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2n}$

Autre version :

$$x_n = \ln x_n + n$$
$$e^{x_n} = x_n e^n$$
$$e^{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \text{ donc } x_n e^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$
$$x_n \sim e^{-n}$$

$$e^{x_n} - 1 \sim x_n$$
$$x_n e^n - 1 \sim x_n$$
$$x_n - e^{-n} \sim x_n e^{-n}$$
$$x_n - e^{-n} \sim e^{-2n}$$

Questions de cours

1 Donner la définition de la domination et de la négligeabilité entre deux suites.
Lien entre les deux.

2 Relations de comparaison entre les suites usuelles n^{α}, $(\ln n)^{\beta}$ …

« exercices sur les équivalents »