Solution

SOURCE : Dictionnaire des mathématiques de STELLA BARUCK.

n.f., 1119, du latin *solutio*, de *solvere*, « action de défaire, de dénouer », et sens mathématique ; sens chimique, « action de dissoudre », au XVIII^{e} s.

I.

1. a. Réponse apportée à une question ou à un ensemble de questions, qui ne se présente pas immédiatement à l'esprit et suppose donc d'être cherchée pendant un certain temps, plus ou moins long : *trouver la solution d'un rébus, d'une énigme, d'un problème.*

b. Dénouement d'une situation embrouillée ou difficile : *l'affaire confiée au juge M. semble trouver un début de solution ; il faut trouver des solutions appropriées aux multiples effets de la pollution.*

2. …

II. « Ensemble-solution » d'équations, d'inéquations, de système d'équations, d'inéquations

1. Il est dommage que l'on ait abandonné au collège la notion et notation fort commode d'ensemble-solution, reprise dans ce dictionnaire. L'ensemble-solution d'une équation est, comme l'expression l'indique, l'ensemble de ses solutions. On peut ainsi vérifier, par exemple, que l'ensemble-solution de l'équation du troisième degré définie dans $\mathbb{R}$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

est :

$$S = \{1, 2, 3\},$$

ce qui veut dire qu'en remplaçant l'inconnue x par 1, 2 ou 3, on obtient une égalité vraie.

2. a. Cette notation a aussi pour avantage de distinguer entre la forme lisible à laquelle on peut faire parvenir une équation, et sa solution ; par exemple, l'équation définie dans $\mathbb{N}$:

$$3x - 1 = x + 8,$$

qu'on ramène à :

$$2x = 9 \quad \text{et} \quad x = \frac{9}{2},$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$; ce qui s'écrit :

$$S_{\mathbb{N}} = \varnothing.$$

b. Cette notation est enfin particulièrement nécessaire pour les solutions d'inéquations, où les solutions sont le plus souvent 'en nombre infini', c'est-à-dire constituées par des intervalles ; ainsi, selon l'ensemble sur lequel est définie l'inéquation suivante :

$$x - 1 \leqslant x + 8,$$

réductible à :

$$x \leq \frac{9}{2},$$

elle aura pour ensemble-solution dans $\mathbb{N}$:

$$S_{\mathbb{N}} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$$

et dans $\mathbb{R}$:

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; \frac{9}{2}].$$

3. On noterait de même les ensembles-solutions de systèmes d'équations ou d'inéquations.

III. Solutions d'un problème

1. On pourra voir que la solution d'un problème se cherche différemment de la façon dont elle s'expose, car l'exposé que l'on doit en faire, lui, a une forme à peu près immuable : on reproduit la donnée ou hypothèse, la question posée, la réponse qu'on y apporte ou conclusion, et la preuve ou la démonstration de cette réponse.

2. (P) Or ce genre d'exposé, quand on le trouve dans des livres ou des cours, est souvent 'traumatisant' pour qui en prend connaissance sans savoir comment la solution a été trouvée, et a été critiqué fort longtemps pour le peu de progrès qu'il permettait de faire dans l' 'art des mathématiques'. Par opposition à l'analyse qui explique la démarche suivie dans la phase de recherche, cette forme d'exposition qu'on a appelée 'synthétique' a été soupçonnée de vouloir *cacher* les processus de pensée menant à la solution et qui pourraient donc 'apprendre à trouver'. On trouve dans l'*Encyclopédie* (B_{10}, article SYNTHÈSE) qu'un auteur « procède par synthèse quand il démontre son résultat de manière à ne pas laisser apercevoir la chaine des propositions qui l'on conduit à ce résultat ». C'est ce qui est ressenti par quiconque 'lit' des mathématiques sous leur forme achevée, et que les collégiens ou lycéens connaissent quand ils travaillent avec des recueils de problèmes comportant les solutions.

3. Il n'y a pas de 'recette pour trouver', mais des *méthodes* qu'enseignent les professeurs, une manière de solliciter sa propre réflexion e surtout une familiarité avec la matière qui s'obtiennent petit à petit. Consulter la solution d'un problème sur lequel on a 'séché' n'a donc rien de choquant. Mais c'est seulement si le terrain a été bien préparé, c'est-à-dire que c'est seulement si on l'a suffisamment cherchée qu'une solution 'prête-à-penser' peut être d'un quelconque profit pour 'apprendre à trouver'.

IV. (P) a. À l'inverse de ce qui s'exprime communément, dire et prouver qu'un problème n'a pas de solution, c'est lui en avoir trouvé une.
b. Quand une solution est évidente, elle est dite **triviale**, ce qui veut dire qu'elle n'offre pas à l'esprit l'intérêt que suppose la recherche d'uns solution qui ne l'est pas.

Conclusion :

Le mot « solution » est employé dans de multiples sens en mathématiques.

Souvent, les élèves confondent « solution » et « résultat ».
On parle du résultat d'un calcul alors que l'on parle de solution d'une équation ou d'une inéquation.