TS spécialité

Contrôle du vendredi 18 novembre 2011 (40 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations. Ne rien écrire sur cette feuille en dehors de ce qui est demandé.

Prénom : ………………………… Nom : ……………………………………… Note : …… / 20

I. (4 points) Démontrer que si a est un entier relatif tel que $a \equiv -3$ (modulo 12), alors $9 - a$ est un multiple de 12.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (4 points)

1°) Démontrer que $3^3 \equiv -1$ (modulo 7). En déduire, sans utiliser la calculatrice, que $3^6 \equiv 1$ (modulo 7).

2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2011} par 7.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points) Déterminer tous les entiers relatifs x tels que l'on ait : $x + 3 \equiv -5$ (modulo 13) et $100 \leqslant x \leqslant 150$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (4 points) Soit x un entier relatif quelconque.

1°) Compléter sans explication le tableau ci-dessous.

Reste de la division euclidienne de x par 5	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Reste de la division euclidienne de x^2+x+3 par 5					

2°) Compléter l'équivalence suivante à l'aide de congruences (c'est-à-dire sous la forme $x \equiv \ldots$ (modulo 5)) :

$x^2+x+3 \equiv 0$ (modulo 5) $\Leftrightarrow$ …………………………………………………………

V. (4 points) Démontrer en utilisant les congruences que, pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n}-1$ est divisible par 8.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 18 novembre 2011

I. Démontrons que si a est un entier relatif tel que $a \equiv -3 \pmod{12}$, alors $9 - a$ est un multiple de 12.

$a \equiv -3$ (modulo 12) donne successivement les congruences suivantes :

$-a \equiv 3$ (modulo 12)

$9 - a \equiv 12$ (modulo 12)

Or $12 \equiv 0$ (modulo 12)

Donc $9 - a \equiv 0$ (modulo 12).

Par suite, **$9 - a$ est un multiple de 12.**

II.

1°) **Démontrons que $3^3 \equiv -1$ (modulo 7).**

$3^3 - (-1) = 27 + 1 = 28$

Or $7 \mid 28$ donc $3^3 \equiv -1$ (modulo 7).

Déduisons-en que $3^6 \equiv 1$ (modulo 7).

On a : $3^3 \equiv -1$ (modulo 7) donc $\left(3^3\right)^2 \equiv (-1)^2$ (modulo 7).
D'où $3^6 \equiv 1$ (modulo 7).

2°) **Déterminons le reste de la division euclidienne de 3^{2011} par 7.**

On a : $2011 = 6 \times 335 + 1$
Or $3^6 \equiv 1$ (modulo 7).
D'où $\left(3^6\right)^{335} \equiv 1^{335}$ (modulo 7).

Donc $3^{6\times 335} \equiv 1$ (modulo 7).

Par suite, $3^{6\times 335} \times 3 \equiv 1 \times 3$ (modulo 7).
Ce qui donne $3^{6\times 335+1} \equiv 3$ (modulo 7).
On obtient finalement, $3^{2011} \equiv 3$ (modulo 7).

On en déduit que le reste de la division euclidienne de 3^{2011} par 7 est égal à 3.

III. Déterminons tous les entiers relatifs x tels que l'on ait : $x + 3 \equiv -5$ (modulo 13) et $100 \leqslant x \leqslant 150$.

La condition $x + 3 \equiv -5$ (modulo 13) donne $x + 8 \equiv 0$ (modulo 13) ce qui signifie $13 \mid x + 8$.

La condition $100 \leqslant x \leqslant 150$ donne $108 \leqslant x + 8 \leqslant 158$.

On cherche les multiples de 13 compris entre 108 et 158 au sens large.

On trouve : 117, 130, 143, 156.

Il y a **quatre cas possibles** :

- $x + 8 = 117$; dans ce cas, $x = 109$
- $x + 8 = 130$; dans ce cas, $x = 122$
- $x + 8 = 143$; dans ce cas, $x = 135$
- $x + 8 = 156$; dans ce cas, $x = 148$

IV.

1°)

Reste de la division euclidienne de x par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $x^2 + x + 3$ par 5	3	0	4	0	3

2°)

$$x^2 + x + 3 \equiv 0 \text{ (modulo 5)} \Leftrightarrow x \equiv 1 \text{ (modulo 5) ou } x \equiv 3 \text{ (modulo 5)}$$

V. Démontrons en utilisant les congruences que, pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

On raisonne modulo 8.

On a : $9 \equiv 1$ (modulo 8) ce qui est équivalent à : $3^2 \equiv 1$ (modulo 8).
D'où $\left(3^2\right)^n \equiv 1^n$ (modulo 8)
On a donc $3^{2n} \equiv 1$ (modulo 8).

Par suite, $3^{2n} - 1 \equiv 0$ (modulo 8).

Donc pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.