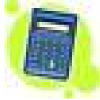
TS spécialité

Contrôle du vendredi 7 octobre 2011 (1 h)



Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Prénom : ………………………………… **Nom :** ……………………………………………………

I. (2 points) Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
Donner la (ou les) condition(s) exprimant que deux entiers q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

………

II. (2 points)
Écrire l'ensemble A de tous les multiples de 3 compris dans l'intervalle [– 7 ; 8].

Écrire l'ensemble B de tous les diviseurs de 6 dans $\mathbb{Z}$.

Utiliser des accolades pour écrire chaque ensemble ; répondre en écrivant directement sans justifier.

A = ……………………………………………………	B = ……………………………………………………

III. (2 points) On rappelle la définition :

Soit a et b deux entiers relatifs. a divise b signifie qu'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.

Soit a, b, c trois entiers relatifs. On suppose que a divise b et que a divise c.
Démontrer en utilisant la définition et en rédigeant convenablement que a divise $b + c$.

………

………

………

………

IV. (2 points) On considère la proposition conditionnelle suivante portant sur trois entiers relatifs a, b, c :

« Si a divise c et b divise c, alors ab divise c. »

Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?

Si elle est vraie, faire la démonstration ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

………

………

V. (4 points) Soit n un entier naturel strictement supérieur à 3.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $5n+21$ par $n+3$.
Effectuer une recherche au brouillon. Proposer une solution courte bien rédigée ci-dessous.

………

………

………

VI. (4 points) On considère un entier naturel N à deux chiffres. On note x le chiffre des dizaines et y le chiffres des unités (on écrit alors $\mathrm{N} = \overline{xy}$). On note N' le nombre obtenu en permutant les deux chiffres.
Démontrer que $\mathrm{N} + \mathrm{N}'$ est divisible par 11.

………

………

………

………

VII. (4 points) Le dividende d'une division euclidienne est strictement inférieur à 5000. Le quotient est égal à 93 et le reste est égal à 51. Déterminer sans justifier les valeurs possibles du dividende et du diviseur.

………

………

Bonus (à traiter au dos)

Soit a et b deux entiers relatifs.
Démontrer que $(a+b)^3$ est divisible par 3 si et seulement si a^3+b^3 est divisible par 3.

Corrigé du contrôle du 7 octobre 2011

I. $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

II.

A : ensemble de tous les multiples de 3 compris dans l'intervalle [– 7 ; 8]

$A = \{-6\,;-3\,;0\,;3\,;6\}$ (il ne faut pas oublier 0 parmi les multiples de 3)

B : ensemble de tous les diviseurs de 6 dans $\mathbb{Z}$

$B = \{-6\,;-3\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;3\,;6\}$

III.

a divise b donc il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.
a divise c donc il existe un entier relatif k' tel que $c = k'a$.

Donc $b + c = ka + k'a = a(k + k')$

Or $k + k'$ est un entier relatif donc a divise $b + c$.

IV. La proposition « Si a divise c et b divise c, alors ab divise c. » est fausse.

Contre-exemple :

8 | 24 et 6 | 24

En revanche 8×6 ne divise pas 24.

V.

$5n + 21 = 5(n+3) + 6$

$n > 3$ donc $n + 3 > 6$

On en déduit que le reste de la division euclidienne de $5n + 21$ par $n + 3$ est égal à 6.

VI.

On a : $N = 10x + y$ et $N' = 10y + x$.

On a alors : $$\begin{aligned} N + N' &= 10x + y + 10y + x \\ &= 11x + 11y \\ &= 11(x+y) \end{aligned}$$

Or $x + y$ est un entier (naturel) donc $N + N'$ est divisible par 11.

VII.

On note a le dividende et b le diviseur.

$a = 93b + 51$

$51 < b$

$93b + 51 < 5000$ donc $93b < 4949$ d'où $b < \dfrac{4949}{53}$

Or d'après la calculatrice, on a : $\dfrac{4949}{53} = 53{,}215053...$.
Donc il y a deux valeurs possibles de b : 52 et 53.

Pour $b = 52$, $a = 52 \times 93 + 51 = 4887$.

Pour $b = 53$, $a = 53 \times 93 + 51 = 4980$.

Bonus

a et b sont deux entiers relatifs.

Démontrons que $(a+b)^3$ est divisible par 3 si et seulement si $a^3 + b^3$ est divisible par 3.

On a : $$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2) \end{aligned}$$

a et b sont deux entiers relatifs donc $a^2b + ab^2$ aussi.
Donc $3(a^2b + ab^2)$ est divisible par 3.

On en déduit que $(a+b)^3$ est divisible par 3 si et seulement si $a^3 + b^3$ est divisible par 3.