1ère S1

Contrôle du mardi 15 novembre 2011

(3 heures)

• Des copies déjà préparées sont jointes au sujet.

• Lire attentivement les consignes générales données sur la dernière page de l'énoncé.

• Des aides pour la rédaction de certaines questions sont également données à la fin du sujet.
Elles sont mentionnées pour chaque question dans l'énoncé par le sigle □.

I. (8 points) On considère les équations et inéquation suivantes :

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+x}{3\left(x^2-1\right)} \qquad (1)$$

$$x^2+|\,x\,|-6=0 \qquad (2)$$

$$\frac{x^2+x-6}{x}\leq 0 \qquad (3)$$

$$\left(x^2+3x-6\right)^2=4x^2 \qquad (4)$$

Donner leurs ensembles de solutions, notés respectivement S_1, S_2, S_3, S_4 (recherche au brouillon).

II. (4 points)

Partie A

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Variations de u		↘	9	↗	‖	↗	1	↘	

Dresser le tableau de variation des fonctions $f : x \mapsto u(x)+1$ et $g : x \mapsto 2-u(x)$.
Compléter directement les tableaux fournis sur la feuille de réponses fournie avec l'énoncé (flèches à la règle).

Partie B

On admet que la fonction u est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $u\left(x\right)=4-x-\dfrac{4}{x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Vérifier que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $u(x)=\dfrac{-x^2+3x}{x+1}$.

2°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. □

III. (6 points) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points A(0 ; 1) et M(x ; y) où x et y désignent deux nombres réels. Le point M appartient à la droite D d'équation réduite $y = x - 4$.
L'objectif de l'exercice est d'étudier les variations de la distance AM lorsque M parcourt la droite D, et en particulier de déterminer la distance AM minimale.

1°) Justifier que $\text{AM} = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.

On admet le résultat suivant : à chaque nombre réel x correspond un unique point M et réciproquement, chaque point de D est associé à un unique réel x.
2°) L'objectif est donc maintenant d'étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.
On pose ainsi $f(x) = \text{AM}$.
a) Dresser sans justification le tableau de variation de la fonction $u : x \mapsto 2x^2 - 10x + 25$ sur $\mathbb{R}$.
On fera les calculs utiles au brouillon. Faire les flèches à la règle.
b) En déduire le tableau de variation de f puis la valeur minimale de la distance AM. *(Cette valeur est, par définition, la distance du point* A *à la droite D.)*

IV. (7 points) Pour tout réel m non nul, on note $\mathcal{C}_m$ la parabole d'équation $y = mx^2 - 2(m+1)x + m + 3$ (m est un paramètre).

1°) Démontrer que toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par le point A(1 ; 1).

2°) Déterminer pour quelle valeur de m la parabole $\mathcal{C}_m$ passe par le point B(0 ; 5). □

3°) On se place dans le cas où m est un réel quelconque non nul et on note S_m le sommet de la parabole $\mathcal{C}_m$.

a) Calculer les coordonnées x_m et y_m de S_m en fonction de m (penser à donner les résultats sous forme simplifiée ; on pourra faire une partie des calculs au brouillon pour ne présenter que les grandes étapes sur la copie).

b) Démontrer que S_m appartient à la droite Δ d'équation cartésienne $x + y - 2 = 0$.

V. (6 points) Soit ABC un triangle quelconque. On note E le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, F le milieu du segment [BC] et G le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Faire une figure au brouillon.

1°) Le but de cette question est de démontrer que les points E, F et G sont alignés.
On se place dans le repère $\boldsymbol{\mathcal{R}} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Donner sans justifier les coordonnées de tous les points de la figure.
Démontrer en utilisant les coordonnées que les points E, F et G sont alignés.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BG) dans le repère $\boldsymbol{\mathcal{R}}$. □

3°) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AF) coupe la droite (BG) en un point K. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BK} = k\,\overrightarrow{BG}$.

VI. (6 points) Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs. Le jeu consiste à miser 5 €, à faire tourner la roue une seule fois et à noter la couleur du secteur désigné par l'index à l'arrêt de la roue. On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître. La roue comporte :

- n secteurs rouges qui font perdre la mise, avec $n \in \mathbb{N}^*$;
- 6 bleus où le joueur récupère le montant de la mise ;
- 3 verts où l'on reçoit 20 € (attention, il reçoit les 20 € après avoir donné la mise) ;
- 1 jaune où l'on reçoit l00 € (il reçoit les 100 € après avoir donné la mise).

On modélise l'expérience aléatoire par le couple (Ω, P) où Ω (univers des possibles) est l'ensemble des secteurs et P la loi d'équiprobabilité.

On note X le gain algébrique du joueur en euros (en tenant compte de la mise).

1°) La roue comporte 12 secteurs rouges ($n = 12$).

a) Donner la loi de probabilité de X (ne pas réduire les fractions).

b) Calculer l'espérance de X (donner directement le résultat sous forme de fraction irréductible sans détailler le calcul).

Par la suite, la roue comporte n secteurs rouges, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2°) Calculer l'espérance de X en fonction de n (donner directement le résultat sous la forme d'un seul quotient).

3°) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans la notation.*

Le propriétaire de la roue désire gagner en moyenne au moins 1,5 € par partie.

Déterminer le nombre minimum n_0 de secteurs rouges que doit comporter la roue pour que le propriétaire soit satisfait.

VII. (3 points)

1°) Compléter la phrase suivante portant sur un réel x quelconque à l'aide d'inégalités :

« $|x + 4| \leqslant 3$ équivaut à ……………………………………………………………… »

2°) On considère le système $\begin{cases} |x+4| \leq 3 \\ |x| \leq a \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où a est un réel strictement positif.

On note S son ensemble de solutions.

a) Donner l'ensemble S sans justifier pour $a = 2$.

b) La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Répondre sans justifier.

« Si $a < 1$, alors $S = \varnothing$. »

Consignes générales

• Ne rien écrire sur l'énoncé.

• À la fin du contrôle garder l'énoncé et rendre les copies.

• Avant de rédiger la solution aux questions, faire une recherche au brouillon pour chaque question afin de proposer une solution propre et sans rature sur la copie (et si possible claire et concise !).

• Faire les traits de fractions et de racines carrées ainsi que les flèches dans les tableaux de variation à la règle.

• Rédiger sans utiliser d'abréviations en faisant attention à l'orthographe.

• Ne pas utiliser de lettres non définies par l'énoncé sans avoir précisé auparavant ce qu'elles représentent.

*****

Aides à la rédaction

II. Partie B 2°)

Pour commencer :

« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sont solutions de l'équation …. ».

Pour conclure, il y a deux façons au choix :

• « $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (… ; …) et (… ; …) » ;

• « $\mathcal{C} \cap (\text{O}x) = \{\text{A} ; \text{B}\}$ avec A(… ; …) et B(… ; …) ».

IV. 2°) Rédiger sous la forme d'une **chaîne d'équivalences** :

B $\in \mathcal{C}_m$ si et seulement si …………………………

si et seulement si …………………………

si et seulement si …………………………

si et seulement si …………………………

V. 2°) Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$.

M $\in$ (BG) si et seulement si …………………………

si et seulement si …………………………

si et seulement si …………………………

$1^{\text{ère}}$ S1 Feuille de réponses du contrôle du mardi 15 novembre 2011

Prénom et nom : ……………………………………………… **Note :** …….. / 40 = …….. **/ 20**

I. (8 points)	II. (4 points)	III. (6 points)	IV. (7 points)	V. (6 points)	VI. (6 points)	VII. (3 points)

I. (8 points) Écrire très lisiblement et sans rature.

S_1 = …………………………………………..	S_2 = …………………………………………..
S_3 =…………………………………………..	S_4 =…………………………………………..

II. (4 points)

Partie A

$f : x \mapsto u(x) + 1$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de f	

$g : x \mapsto 2 - u(x)$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de g	

Partie B

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

III. (6 points)

1°) …………………………………………………………………………………..……………………..

………..

………..

………..

………..

………..

………...

………...

………...

………...

………...

2°)

a)

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de u	

b)

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de f	

La valeur minimale de AM est égale à …………….

IV. (7 points)

Prénom : …………… Nom : …………………………

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……...

……...

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

V. (6 points)

		......		......		......		......		......		......
1°)	A		B		C		E		F		G	
		......		......		......		......		......		......

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……...

……...

……..

……..

……..

……..

……….

……...

……..

……..

………..

………..

………..

………..

………...

………...

……..

………..

………..

………..

………..

………...

………..

………..

VI. (6 points)

1°)

a) X peut prendre les valeurs $x_1 = \ldots.$, $x_2 = \ldots.$, $x_3 = \ldots.$, $x_4 = \ldots.$.

x_i		
$P(\mathrm{X} = x_i)$		Total =1

b) E(X) = ……………………… (écrire un seul résultat)

2°) E(X) = …………………….. (écrire un seul résultat)

3°) ……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

VII. (3 points)

1°) « $|x+4| \leqslant 3$ équivaut à ………………………………………………………. »

2°) a) Pour $a = 2$, S = …………………..

b) La phrase : « Si $a < 1$, alors S = ∅. » est ……………………..

Corrigé du contrôle du 15 novembre 2011

I. Équations et inéquations

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+x}{3\left(x^2-1\right)}$ (1)

Les valeurs interdites de l'équation sont 1 et – 1 (valeurs de x qui annulent les dénominateurs).

On résout l'équation (1) dans $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2+x}{3\left(x^2-1\right)}$ (on réduit au même dénominateur le premier membre)

On pouvait aussi tout mettre au même dénominateur. Mais pour que le calcul ne soit pas trop compliqué, il fallait observer que $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

On prenait alors $3(x-1)(x+1)$ comme dénominateur.

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x}{3(x-1)(x+1)}$$
$$6=x+x^2$$
$$x^2+x-6=0$$

Considérons le polynôme x^2+x-6.

Les racines sont 2 (racine évidente) et – 3.

On pouvait évidemment utiliser le programme de la calculatrice pour déterminer les racines (d'autant plus que les racines étaient entières).

Ces deux valeurs ne sont pas valeurs interdites.

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{2 ; -3\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+|\,x\,|-6=0$ (2)

On pose $X = |\,x\,|$ (changement d'inconnue).

L'équation s'écrit : $X^2+X-6=0$ (c'est l'équation « résolvante »).

Considérons le polynôme X^2+X-6 (du second degré en X).

Les racines du polynôme sont $X_1=2$ et $X_2=-3$ (déjà calculées dans la résolution de l'équation (1) puisque c'était le même polynôme).
Or $X = | x |$.
Donc (2) est successivement équivalente à :

$| x | = 2$ ou $| x | = -3$ (impossible car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul)

$x = 2$ ou $x = -2$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S_2 = \{2 ; -2\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+x-6}{x} \leq 0$ (3)

0 est valeur interdite de cette inéquation.
On résout dans $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
x		$-$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+x-6}{x}$		$-$	0^{num}	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est $S_3 =]-\infty ; -3] \cup]0 ; 2]$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(x^2+3x-6\right)^2 = 4x^2$ (4)

L'équation (4) est successivement équivalente à :

$\left(x^2+3x-6\right)^2 - 4x^2 = 0$

$\left(x^2+3x-6\right)^2 - (2x)^2 = 0$

$\left[\left(x^2+3x-6\right)-(2x)\right]\left[\left(x^2+3x-6\right)+(2x)\right] = 0$

$\left(x^2+x-6\right)\left(x^2+5x-6\right) = 0$

$x^2+x-6=0$ ou $x^2+5x-6=0$

$x = 2$ ou $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = -6$

L'ensemble des solutions de l'équation (4) est $S_4 = \{2 ; -3 ; 1 ; -6\}$ (inutile de mettre les valeurs dans l'ordre croissant ; il n'y a pas d'ordre dans les accolades).

II.

Partie A

Les fonctions f et g sont définies sur le même ensemble de définition que u c'est-à-dire $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Les valeurs de x ne changent pas.

$f : x \mapsto u(x) + 1$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Variations de f		↘	10	↗	‖	↗	2	↘	

$g : x \mapsto 2 - u(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Variations de g		↗	-7	↘	‖	↘	1	↗	

Partie B

$u : x \mapsto 4 - x - \dfrac{4}{x+1}$

$\mathcal{C}$: représentation graphique de u dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1°) Vérifions que $\forall\, x \neq -1 \quad u(x) = \dfrac{-x^2 + 3x}{x+1}$.

$$\forall\, x \neq -1 \quad u(x) = 4 - x - \frac{4}{x+1}$$ (ne pas oublier le quantificateur sur la première ligne)

$$= \frac{(4-x)(x+1) - 4}{x-1}$$ (on met directement au même dénominateur sans écrire plus de lignes)

$$= \frac{4x \cancel{+4} - x^2 - x \cancel{-4}}{x-1}$$

$$= \frac{3x - x^2}{x-1}$$

2°) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $u(x) = 0$ (1).

On résout cette équation dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(1) est successivement équivalente à :

$\dfrac{3x-x^2}{x-1}=0$ (on utilise la forme de $u(x)$ établie à la question précédente)

$3x-x^2=0$

$x(3-x)=0$

$x=0$ ou $3-x=0$

$x=0$ ou $x=3$

Conclusion :

Il y a deux façons.

• $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (0 ; 0) et (3 ; 0).

• $\mathcal{C} \cap (\mathrm{O}x) = \{\mathrm{A} ; \mathrm{B}\}$ avec A(0 ; 0) et B(3 ; 0).

En fait, le point A est confondue avec l'origine O du repère.

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

III. Étude d'un problème d'optimisation

A(0 ; 1)

$D : y = x - 4$

$\mathrm{M}(x\,;y) \in D$

1°) Justifions que $\mathrm{AM}=\sqrt{2x^2-10x+25}$.

On est dans un repère orthonormé. On peut donc appliquer la formule donnant la distance de deux points dans un repère orthonormé.

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}&=\sqrt{\left(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2}\\&=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}\\&=\sqrt{x^2+(x-4-1)^2}\\&=\sqrt{x^2+(x-5)^2}\\&=\sqrt{2x^2-10x+25}\end{aligned}$$

2°) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2-10x+25}$

a) $u : x \mapsto 2x^2-10x+25$

u est une fonction polynôme du second degré.
On applique la règle du cours donnant le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré connaissant son expression sous forme développée.

La fonction u admet un minimum obtenu pour $x = -\dfrac{-10}{2\times 2} = \dfrac{5}{2}$.

On calcule : $u\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
Variations de u		$\searrow$	$\dfrac{25}{2}$	$\nearrow$	

b) On observe que $f = \sqrt{u}$.
D'après la règle du cours, on sait donc que les variations de f sont les mêmes que celle de u.

x	$-\infty$		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

On peut tout à fait donner le résultat sous cette forme là ; il est complètement inutile de « remonter » la racine au numérateur)

En remontant la racine au numérateur, on obtient : $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

La valeur minimale de AM est égale à $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

IV. Étude d'une famille de paraboles

$\mathcal{C}_m$: $y = mx^2 - 2(m+1)x + m + 3$ (m réel non nul)

1°) Démontrons que toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par le point A(1 ; 1).

On adopte une démarche déductive (pas de démarche par équivalence).

$$\begin{aligned} m{x_A}^2 - 2(m+1)x_A + m + 3 &= m\times 1^2 - 2(m+1)\times 1 + m + 3 \\ &= m - 2\,(m+1) + m + 3 \\ &= 1 \\ &= y_A \end{aligned}$$

Donc toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par le point A(1 ; 1).

2°) Déterminons pour quelle valeur de m la parabole $\mathcal{C}_m$ passe par le point B(0 ; 5).

B $\in \mathcal{C}_m$ si et seulement si $y_B = m{x_B}^2 - 2(m+1)x_B + m + 3$

si et seulement si $5 = m\times 0^2 - 2(m+1)\times 0 + m + 3$

si et seulement si $5 = m + 3$

si et seulement si $m = 2$

3°) S_m : sommet de la parabole $\mathcal{C}_m$

a) Calculons les coordonnées x_m et y_m de S_m en fonction de m.

Pour calculer x_m, on applique la formule du cours qui donne l'abscisse du sommet d'une parabole.

$$x_m = -\frac{-2(m+1)}{2m}$$

$$= \frac{m+1}{m}$$

Pour calculer y_m, on utilise l'équation de $\mathcal{C}_m$.

$$y_m = m\times\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2(m+1)\times\frac{m+1}{m} + m + 3$$

$$= m\times\frac{(m+1)^2}{m^2} - 2\frac{(m+1)^2}{m} + m + 3$$

$$= \cancel{m}\times\frac{(m+1)^2}{m\times\cancel{m}} - 2\frac{(m+1)^2}{m} + m + 3 \quad \text{(on simplifie)}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{m} - 2\frac{(m+1)^2}{m} + m + 3 \quad \text{(on effectue la somme des deux premiers termes)}$$

$$= -\frac{(m+1)^2}{m} + m + 3$$

$$= -\frac{(m+1)^2}{m} + m + 3$$

$$= \frac{-(m+1)^2 + m^2 + 3m}{m}$$

$$= \frac{3m - 2m - 1}{m}$$

$$= \frac{m-1}{m}$$

Conclusion : $x_m = \dfrac{m+1}{m}$ et $y_m = \dfrac{m-1}{m}$

b) Démontrons que S_m appartient à la droite Δ d'équation cartésienne $x + y - 2 = 0$.

On calcule :

$$x_m + y_m - 2 = \frac{m+1}{m} + \frac{m-1}{m} - 2$$

$$= \frac{2\cancel{m}}{\cancel{m}} - 2$$

$$= 0$$

Conclusion : $S_m \in \Delta$

V. Vecteurs et coordonnées

1°) $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $E\left|\begin{matrix}\frac{3}{4}\\0\end{matrix}\right.$ $F\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ $G\left|\begin{matrix}0\\\frac{3}{2}\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\left|\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\left|\begin{array}{l} -\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

1ère façon : on calcule le déterminant.

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=0$$

2e façon : on détermine un coefficient de colinéarité entre les deux vecteurs.

On constate que $\overrightarrow{\mathrm{EG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ sont donc colinéaires.
Comme ils ont point commun, on en déduit que les points E, F, G sont alignés.

On aurait pu retrouver ce résultat en utilisant les vecteurs sans utiliser les coordonnées (ça aurait pu être une question bonus mais le contrôle était déjà très long).

2°)

Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point quelconque du plan.

$\mathrm{M} \in$ (BG) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\left|\begin{array}{l} x-1 \\ y \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\left|\begin{array}{l} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & \dfrac{3}{2} \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\dfrac{3}{2}(x-1)-(-1)\times y = 0$

si et seulement si $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}+y=0$

si et seulement si $3x+2y-3=0$

(BG) a pour équation cartésienne : $3x+2y-3=0$.

3°) On cherche une équation de (AF).

Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point quelconque du plan.

$M \in (AF)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} \\ y & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$

si et seulement si $x - y = 0$

(AF) a pour équation : $y = x$.

K est le point d'intersection des droites (AF) et (BG) donc ses coordonnées vérifient $\begin{cases} 3x_K + 2y_K - 3 = 0 \\ y_K = x_K \end{cases}$.

On obtient ainsi : $5x_K - 3 = 0$.

D'où $x_K = \frac{3}{5}$.

Par suite, $y_K = \frac{3}{5}$

$\overrightarrow{BK}\begin{vmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{vmatrix}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{BG}\begin{vmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{vmatrix}$

On en déduit que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BG}$.

VI. Probabilités

1°)

a) On doit tenir compte de la mise pour donner les valeurs de X.

X peut prendre les valeurs $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 15$, $x_4 = 95$.

x_i	-5	0	15	95	
$P(X = x_i)$	$\frac{12}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{22}$	Total =1

b) E(X) = $-5\times\frac{12}{22}+0\times\frac{6}{22}+15\times\frac{3}{22}+95\times\frac{1}{22}$

$=\frac{80}{22}$

$=\frac{40}{11}$

2°) Dans cette question et la suivante, n est un entier naturel quelconque ; on travaille en littéral.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau :

x_i	-5	0	15	95	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{n}{n+10}$	$\frac{6}{n+10}$	$\frac{3}{n+10}$	$\frac{1}{n+10}$	Total =1

E(X) = $-5\times\frac{n}{n+10}+15\times\frac{3}{n+10}+95\times\frac{1}{n+10}$

$=\frac{-5n+45+95}{n+10}$

$=\frac{-5n+140}{n+10}$

3°) Ce que gagne le propriétaire est l'opposé de ce que gagne le joueur.

On cherche donc n tel que $-$ E(X) > 1,5 soit E(X) < $-$ 1,5 (1).

(1) est successivement équivalente à :

$\frac{-5n+140}{n+10}+1{,}5<0$

$\frac{-3{,}5n+140+15}{n+10}<0$

$\frac{-3{,}5n+155}{n+10}<0$

$-3{,}5\,n+155<0$ (on peut se permettre d'enlever le dénominateur car, comme $n\in\mathbb{N}$, $n+10>0$)

$n>\frac{155}{3{,}5}$

Avec la calculatrice, on obtient : $\frac{155}{3{,}5}=44{,}2857142...$

On en déduit que (1) équivaut à $n\geqslant 45$.

La roue doit comporter au minimum 45 secteurs rouges pour que le propriétaire gagne en moyenne au moins 1,5 €.

VII.

1°) $|\, x + 4 \,| \leqslant 3$ est successivement équivalent à

$-3 \leqslant x + 4 \leqslant 3$

$-3 - 4 \leqslant x \leqslant 3 - 4$

$-7 \leqslant x \leqslant -1$

2°) $\begin{cases} |\, x+4 \,| \leq 3 \\ |\, x \,| \leq a \end{cases}$ $(a > 0)$

a) $a = 2$

Le système s'écrit : $\begin{cases} |\, x+4 \,| \leq 3 \\ |\, x \,| \leq 2 \end{cases}$.

Il est donc successivement équivalent à :

$$\begin{cases} -7 \leq x \leq -1 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$-2 \leqslant x \leqslant -1$

L'ensemble des solutions du système est l'intervalle $[-2 ; -1]$.

b) La phrase « Si $a < 1$, alors $S = \varnothing$. » est vraie.

En effet, le système est équivalent à $\begin{cases} -7 \leq x \leq -1 \\ -a \leq x \leq a \end{cases}$.

L'ensemble S des solutions du système est donc l'intersection des intervalles $[-7 ; -1]$ et $[-a ; a]$.

En représentant les deux intervalles sur la droite réelle, on voit aisément que si $a < 1$, les deux intervalles ont une intersection vide donc l'ensemble des solutions est vide.