TS1

Contrôle du jeudi 20 octobre 2011 (1 h)

Prénom et nom : ………………………………………………. **Note : ……/20**

Faire tous les traits de fractions et les racines carrées à la règle.

I. (2 points) Déterminer les limites suivantes sans citer les règles utilisées mais en détaillant les calculs de manière à ce que l'on puisse comprendre les règles utilisées.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2} = $ ……………………………………………………………………………………………

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)^3}{2x} = $ ……………………………………………………………………………………………

II. (4 points)

• Rappeler la forme indéterminée relative au produit de deux fonctions. « …………… »

• Donner un exemple de deux fonctions *f* et *g* vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)g(x)\right]=0$.

On se contentera de donner les expressions de *f* et *g* sans faire de phrase ni justifier le choix.

$f(x)=$………………..	$g(x)=$………………..

• Même question si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)g(x)\right]=3$.

$f(x)=$………………..	$g(x)=$………………..

• Même question si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)g(x)\right]=+\infty$.

$f(x)=$………………..	$g(x)=$………………..

III. (2 points) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\dfrac{1}{x}}$ en utilisant la limite d'une composée.

Compléter :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{X}\Big) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \lim\limits_{X\to\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x}} = \ldots\ldots\ldots$$

Les exercices **IV** et **V** doivent être rédigés sur les pages 2, 3, 4.

IV. (6 points) On ne cherchera pas les ensembles de définition des fonctions proposées.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin 7x}{x}$.

Déterminer la limite de *f* en 0 en utilisant un changement de variable et une limite de référence.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto 2x+\sqrt{x^2+1}$.

Déterminer la limite de *g* en $-\infty$.

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{3x+10}-8}{x-2}$.

Déterminer la limite de *h* en 2. Détailler les principales étapes de calcul.

V. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{E}(x)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* pour $x \in [1\,;2[$ puis pour $x \in [2\,;3[$.

La fonction *f* est-elle continue en 2 ? Justifier.

Question bonus : étudier la continuité de *f* en un entier relatif *n* quelconque non nul.

VI. (2 points) On considère l'équation différentielle $y-2y'=0 \quad (\mathrm{E})$.

Compléter la phrase :

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par …………………………….………………………..

……….

Corrigé du contrôle du 20-10-2011

I.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)^3}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^3}{2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\infty$$

II.

• Forme indéterminée relative au produit de deux fonctions : « $0\times\infty$ ».

• Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)g(x)\right]=0$, on pouvait prendre $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ et $g(x)=x$.

• Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)g(x)\right]=3$, on pouvait prendre $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=3x$.

• Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)g(x)\right]=+\infty$, on pouvait prendre $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2$.

On pouvait aussi prendre des exemples plus complexes utilisant, par exemple, les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

• Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)g(x)\right]=0$, on pouvait prendre :

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\ln x$

ou $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\sqrt{x}$

• Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)g(x)\right]=+\infty$, on pouvait prendre

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\mathrm{e}^x$

ou $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $g(x)=x$

III.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{4+\frac{1}{x}}_{X}\right)=4\\ \lim\limits_{X\to4}\sqrt{X}=2\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée }\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}}=2.$$

IV.

1°) $f:x\mapsto\dfrac{\sin 7x}{x}$

Déterminons la limite de f en 0 en utilisant un changement de variable et une limite de référence.

Quand $x\to0$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On effectue le changement de variable $X=7x$.

$(x\to0)\Leftrightarrow(X\to0)$

$f(x)=7\dfrac{\sin X}{X}$

On a : $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$ (limite de référence).

$$\boxed{\lim_{x\to0}f(x)=7}$$

2°) $g:x\mapsto 2x+\sqrt{x^2+1}$

Déterminons la limite de g en $-\infty$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^*\quad g(x)&=2x+\sqrt{x^2+1}\\&=2x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\\&=2x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x<0\quad g(x)&=2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&=x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

3°) $h : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{3x+10}-8}{x-2}$

Déterminons la limite de h en 2.

$$h(x)=\frac{2\sqrt{3x+10}-8}{x-2}$$

On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On effectue une réécriture (quantité conjuguée).

$$\forall x\in \mathcal{D}_h \quad h(x)=\frac{\left(2\sqrt{3x+10}-8\right)\left(2\sqrt{3x+10}+8\right)}{(x-2)\left(2\sqrt{3x+10}+8\right)}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{3x+10}\right)^2-8^2}{(x-2)\left(2\sqrt{3x+10}+8\right)}$$

$$=\frac{4(3x+10)-64}{(x-2)\left(2\sqrt{3x+10}+8\right)}$$

$$=\frac{12x-24}{(x-2)\left(2\sqrt{3x+10}+8\right)}$$

$$=\frac{12(x-2)}{(x-2)\left(2\sqrt{3x+10}+8\right)}$$

$$=\frac{12}{2\sqrt{3x+10}+8}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{3x+10}+4}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6}{\sqrt{3x+10}+4}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.

V.

$f : x\mapsto x\mathrm{E}(x)$

Exprimons $f(x)$ en fonction de x pour $x\in[1\,;2[$ puis pour $x\in[2\,;3[$.

Pour $x\in[1\,;2[$ $\quad f(x)=x$.

Pour $x\in[2\,;3[$ $\quad f(x)=2x$.

Étudions la continuité de f en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$

Ces deux limites sont différentes donc f n'a pas de limite en 2.
Par conséquent, f n'est pas continue en 2.

Question bonus : Étudions la continuité de f en un entier relatif n quelconque non nul.

Exprimons $f(x)$ en fonction de x pour $x\in[n-1\,;n[$ puis pour $x\in[n\,;n+1[$.

Pour $x\in[n-1\,;n[$ $\quad f(x)=(n-1)x$.

Pour $x\in[n\,;n+1[$ $\quad f(x)=nx$.

$\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=n(n-1)$

$\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=n^2$

Nous allons chercher à quelle condition ces deux limites sont égales.

On cherche pour quels entiers relatifs n ces deux limites sont égales c'est-à-dire les entiers relatifs n tels $n(n-1)=n^2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow -n=0$

$\Leftrightarrow n=0$

Donc pour n non nul, ces deux limites sont différentes. Par conséquent, f n'admet pas de limite en n, et par suite f n'est pas continue en n.

VI.

$y - 2y' = 0 \quad (\text{E})$

(E) s’écrit : $y' = \dfrac{y}{2}$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = \dfrac{1}{2}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \quad (k \in \mathbb{R})$.