**TS1**

# Contrôle du mardi 8 novembre 2011 (3 h)

Sur la première page de la copie, préparer un cartouche sous forme de tableau avec le numéro des exercices qui permettra d'indiquer le montant de points pour chacun d'eux.
Ne rien écrire sur le sujet.

Le barème des exercices est donné sur 40.

---

## I. (12 points) QCM

Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.
Remplir directement le tableau sur la feuille de réponses fournie avec l'énoncé en écrivant sans ratures les lettres des réponses choisies.

Chaque réponse juste rapporte un point ; chaque réponse fausse enlève un point.
L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.

1°) $\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+3}$ est égal à :

A. $\dfrac{1}{e^{-x}+3}$ B. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{1+3e^{-x}}$ C. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{1+3e^x}$ D. $\dfrac{1+e^{-2x}}{e^{-x}+3e^{-2x}}$

2°) L'ensemble des réels $x$ pour lesquels l'expression $\left(e^{-x}-1\right)\left(e^x+2\right)$ est positive ou nulle est :

A. $]-\infty\,;0]$ B. $[0\,;+\infty[$ C. $\mathbb{R}$ D. $[-2\,;-1]$

3°) L'équation $e^{2x}+3e^x+2=0$ :

A. n'a pas de solution réelle.
B. a pour solution ln 2.
C. a pour solutions 0 et ln 2.
D. a pour solutions 1 et ln 2.

4°) $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}$ est égal à :

A. $\dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}+1}$ B. $1-\dfrac{3}{1+e^x}$ C. $\dfrac{2-e^{-x}}{e^{-x}+1}$ D. $\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{2}{e^x+1}$

5°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-e^x-2e^{-x}}}$ est :

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R}\setminus\{0\,;\ln 2\}$ C. $]0\,;\ln 2[$ D. $]1\,;2[$

6°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{2x+1}{x-1}}$ est donnée par :

A. $f'(x)=e^{\frac{2x+1}{x-1}}$ B. $f'(x)=2e^{\frac{2x+1}{x-1}}$ C. $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}\,e^{\frac{2x+1}{x-1}}$ D. $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}\,e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

7°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2$ est donnée par :

A. $f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$ B. $f'(x)=2\ln x$ C. $f'(x)=\dfrac{2}{x}$ D. $f'(x)=\ln\left(x^2\right)$

8°) Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.
La relation $\ln\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$ est équivalente à :

A. $\dfrac{a+b}{4}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ B. $a^2+b^2=14ab$ C. $a+b=2ab$ D. $a^2+b^2=16ab$

9°) L'équation $\ln\left(x^3+x+1\right)=\ln(2x+1)$ :

A. n'a pas de solution réelle.
B. a une solution réelle.
C. a deux solutions réelles.
D. a trois solutions réelles.

10°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x\times\left[(\ln x)-1\right]\leqslant 0$ est :

A. $[1\,;+\infty[$ B. $]0\,;1]$ C. $[1\,;e]$ D. $]-\infty\,;1]$

11°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ln x)\times\ln(x-1)\geqslant 0$ est :

A. $[1\,;2]$ B. $]2\,;+\infty[$ C. $]-\infty\,;1]\cup[2\,;+\infty[$ D. $[2\,;+\infty[$

12°) L'équation $(\ln x)^3=\ln x$ :

A. n'a pas de solution réelle.
B. a une solution réelle.
C. a deux solutions réelles.
D. a trois solutions réelles.

**II. (8 points)**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Effectuer les recherches au brouillon.
Compléter les phrases figurant sur la feuille de réponses.

1°) Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

2°) Déterminer le nombre de solutions de $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

3°) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4°) Déterminer la valeur exacte du minimum de $f$.

5°) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-0,04$.

6°) Déterminer l'expression de $f''(x)$.

7°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $D$ d'équation $y=2(-x+2)$.

8°) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(2-n)\mathrm{e}^{-n}$.

---

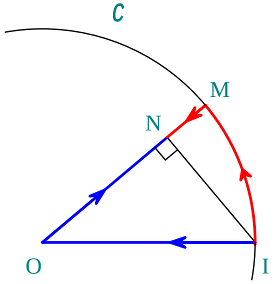
**III. (10 points)**

**Partie 1**

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Soit I un point fixé de $\mathcal{C}$.

Soit $x$ un réel tel que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et M un point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{\mathrm{IOM}}=x$ rad.

On note N le projeté orthogonal de I sur la droite (OM).
On étudie la longueur des deux trajets qui mènent de I à N :
Trajet 1 : I-O-N constitué de deux segments ;
Trajet 2 : I-M-N constitué d'un arc de cercle et d'un segment.




1°) Exprimer en fonction de $x$ :
a) la longueur du trajet 1 ;
b) la longueur du trajet 2.
On notera $\ell_1$ et $\ell_2$ les longueurs respectives de ces deux trajets.

2°) Démontrer que ces deux trajets sont de même longueur si et seulement si $\cos x=\frac{x}{2}$.

**Partie 2**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $J=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos x-\frac{x}{2}$.

1°) Étudier la continuité de $f$ sur $J$.
2°) Calculer la dérivée de $f$.
3°) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x\in J$.
En déduire le sens de variation de $f$ sur $J$ et dresser le tableau de variations de $f$ sur $J$ (tableau et flèches de variations à la règle).
On calculera au brouillon les valeurs de $f(0)$ et de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (valeurs exactes).

4°) Démontrer que l'équation $\cos x=\frac{x}{2}$ (E) admet une unique solution notée $x_0$ dans l'intervalle $J$.
On ne cherchera pas à calculer cette solution.
Dans le tableau de variation de $f$ établi au 3°), placer $x_0$ sur la première ligne du tableau.
Placer 0 sur la flèche de variation et « relier » $x_0$ et 0 par des pointillés.
5°) Justifier à l'aide de la calculatrice que l'on a : $1<x_0<1,1$.
À l'aide de cet encadrement, déterminer un encadrement de la longueur des deux trajets pour $x=x_0$.

**Partie 3**

On considère l'algorithme suivant rédigé en langage naturel.

**Initialisations**
$a$ prend la valeur 1
$b$ prend la valeur 1,1

**Traitement**
**Tantque** $b-a>0,0001$
  $x$ prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
  **Si** $\cos x>\frac{x}{2}$ alors
    $a$ prend la valeur $x$
  Sinon
    $b$ prend la valeur $x$
  **FinSi**
**FinTantque**

**Sorties**
Afficher $a$ et $b$

*Suite du sujet sur l'autre page*

1°) Quel est le rôle de cet algorithme ?

2°) **Question bonus :**

Écrire le programme associé sur la calculatrice (en indiquant le modèle de calculatrice utilisé).
Donner les valeurs $a$ et $b$ affichées en sortie.

---

## IV. (3 points)

On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ où $a$, $b$, $c$ désignent trois réels.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

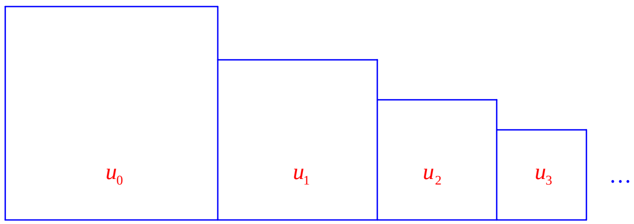
On sait que :
- $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(0\ ;\ 1)$ ;
- $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 ;
- $f'(0)=-6$.

Déterminer les valeurs de $a$, $b$, $c$. Détailler les principales étapes de calcul uniquement.

---

**V. (3 points)** Le premier carré (étape 0) est de côté 1, puis chaque carré a pour côté $\dfrac{3}{4}$ du précédent.

On note $u_n$ l'aire du carré à l'étape $n$.




1°) Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
On tâchera de donner une explication rigoureuse et concise.
2°) Exprimer en fonction de $n$ la somme : $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $S_n<\dfrac{16}{7}$.

## VI. (4 points)

### Partie 1

On note $E$ l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de nombres réels non nuls vérifiant la relation :

$$\left(\ln|x|\right)^2+\left(\ln|y|\right)^2=2.$$

Répondre par vrai ou faux sans justifier. Compléter le tableau sur la feuille de réponses fournie avec l'énoncé.

1°) Le couple $(\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e})$ appartient à $E$.

2°) Le couple $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ appartient à $E$.

3°) Le couple $(1\ ;1)$ appartient à $E$.

4°) Si le couple $(x\ ;\ y)$ appartient à $E$ alors le couple $(-x\ ;-y)$ appartient à $E$.

### Partie 2

*Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $F$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ tels que l'on ait $\left(\ln|x|\right)^2+\left(\ln|y|\right)^2=2$.

1°) Démontrer que $F$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y=x$ pour axe de symétrie.

2°) On pose $a=\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.
Démontrer que l'ensemble $F$ est inclus dans le carré $D$, ensemble des points $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ tels que l'on ait :
$-a\leqslant x\leqslant a$ et $-a\leqslant y\leqslant a$.

**Prénom et nom :** ………………………………………………………………………………………

---

## I. QCM (12 points)

| Questions | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Réponses | | | | | | | | | | | | | |

---

## II. (8 points)

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ …………

2°) L'équation $f(x) = 0$ admet ………………………………..

3°) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation ……………………………………..

4°) Le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$ est égal à …………… .

5°) L'équation $f(x) = -0,04$ admet ………………………………..

6°) $f''(x) =$ ………………………..

7°) Les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $D$ d'équation $y = 2(-x+2)$ ont pour abscisses

…………………………………… .

8°) La suite $(u_n)$ définie par $u_n = (2-n)\mathrm{e}^{-n}$ est ………………………………… à partir de l'indice ………. .

## VI. (4 points)

### Partie 1

| Questions | 1°) | 2°) | 3°) | 4°) | |
|---|---|---|---|---|---|
| Réponses | | | | | |

# Corrigé du contrôle du 8-11-2011

## I. QCM

| Questions | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Réponses | B D | A | A | B D | C | D | A | B | C | C | D | D |

1°) $\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+3}=\dfrac{\cancel{e^{2x}}\left(1+\dfrac{1}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{3}{e^{2x}}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}{\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{3}{e^{2x}}}=\dfrac{1+e^{-2x}}{e^{-x}+3e^{-2x}}$

$\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+3}=\dfrac{\cancel{e^x}\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{3}{e^x}\right)}=\dfrac{e^x+\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{3}{e^x}}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{1+3e^{-x}}$

2°) On cherche les réels $x$ tels que $\left(e^{-x}-1\right)\left(e^x+2\right)\geqslant 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow e^{-x}-1\geqslant 0 \quad (\text{car } \forall x\in\mathbb{R} \quad e^x+2>0)$

$\Leftrightarrow e^{-x}\geqslant 1$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right)\geqslant \ln 1$

$\Leftrightarrow -x\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x\leqslant 0$

3°) L'équation $e^{2x}+3e^x+2=0$ n'a pas de solution réelle.

En effet, l'expression $e^{2x}+3e^x+2$ qui figure dans le premier membre est toujours strictement positive (une exponentielle est toujours strictement positive).

4°) $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}$

$\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=\dfrac{\left(e^x+1\right)-3}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1}{e^x+1}-\dfrac{3}{e^x+1}=1-\dfrac{3}{e^x+1}$

$\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{2}{e^x+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}-\dfrac{2}{e^x+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1+e^x}{e^x}}-\dfrac{2}{e^x+1}=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{2}{e^x+1}=\dfrac{e^x-2}{1+e^x}$

5°) $f: x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-e^x-2e^{-x}}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $3-e^x-2e^{-x}>0$

si et seulement si $3-e^x-\dfrac{2}{e^x}>0$

si et seulement si $3e^x-e^{2x}-2>0$ (1) (car $e^x>0$ donc on peut multiplier les deux membres par $e^x$ ; le sens de l'inégalité ne change pas)

On pose $X=e^x$.

L'inéquation (1) s'écrit : $3X-X^2-2>0 \quad (2)$.

Les racines du polynôme $3X-X^2-2$ sont 1 et 2.

Donc $(2) \Leftrightarrow 1<X<2$ (règle du signe d'un trinôme)

Or $X=e^x$.

Donc $(1) \Leftrightarrow 1<e^x<2$

$\Leftrightarrow \ln 1<x<\ln 2$

6°) $f: x\mapsto e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

On applique la formule : $\left(e^u\right)'=u'e^u$ avec $u(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

$f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}\,e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

7°) $f: x\mapsto (\ln x)^2$

On applique la formule : $\left(u^2\right)'=2uu'$ avec $u(x)=\ln x$.

$f'(x)=2\times\ln x\times\dfrac{1}{x}=2\dfrac{\ln x}{x}$

8°) $a>0$ ; $b>0$

$\ln\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b) \quad (1)$

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln\frac{a+b}{4}=\frac{1}{2}\ln(ab)\\
&\Leftrightarrow 2\ln\frac{a+b}{4}=\ln(ab)\\
&\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{a+b}{4}\right)^2\right]=\ln(ab)\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)^2=ab\\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{16}=ab\\
&\Leftrightarrow (a+b)^2=16ab\\
&\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=16ab\\
&\Leftrightarrow a^2+b^2=14ab
\end{aligned}
$$

9°) $\ln\left(x^3+x+1\right)=\ln(2x+1)$ $(1)$

**Conditions d'existence :**

Si $x$ est solution de (1), alors $\begin{cases} x^3+x+1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x^3+x+1>0 \\ x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

On ne peut pas résoudre l'inéquation algébriquement $x^3+x+1>0$.

On ne peut donc pas donner l'ensemble de résolution facilement.

**Résolution :**

On va raisonner par implications successives (en se plaçant dans $\mathbb{R}$ comme ensemble de référence pour $x$).
On obtient successivement :

$x^3+x+1=2x+1$
$x^3-x=0$
$x\left(x^2-1\right)=0$
$x(x-1)(x+1)=0$
$x=0$ ou $x-1=0$ ou $x+1=0$
$x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

On doit à présent vérifier si les solutions conviennent en remplaçant $x$ par la valeur 0 puis par la valeur 1 et enfin par la valeur – 1.

On voit que l'égalité obtenue en remplaçant $x$ par 0 ou 1 est vraie.

En revanche, quand on remplace $x$ par – 1 les expressions du membre de gauche et de droite n'existent pas (on obtient des logarithmes de nombres négatifs).

Donc l'ensemble des solutions de $(1)$ est $\{0\,;1\}$.

10°) $\ln x\times\left[(\ln x)-1\right]\leqslant 0$ $(1)$

Conditions d'existence :

Si $x$ est solution de $(1)$, alors $x>0$.

On résout l'inéquation dans $]0\,;+\infty[$.

**Résolution :**

Le mieux est de faire un tableau de signes.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $\ln x-1$ | ‖ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $\ln x\times\left[(\ln x)-1\right]$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $[1\,;e]$.

11°) $\ln x\times\ln(x-1)\geqslant 0$ $(1)$

**Conditions nécessaires d'existence :**

Si $x$ est solution de $(1)$, alors $\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}$ soit $x>1$.

On résout l'inéquation dans $]1\,;+\infty[$.

**Résolution :**

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln(x-1)\geqslant 0 \quad (\text{car } \forall x\in\,]1\,;+\infty[\quad \ln x>0)\\
&\Leftrightarrow \ln(x-1)\geqslant \ln 1\\
&\Leftrightarrow x\geqslant 2
\end{aligned}
$$

12°) $(\ln x)^3=\ln x$ $(1)$

**Conditions nécessaires d'existence :**

Si $x$ est solution de $(1)$, alors $x>0$.

On résout l'équation dans $]0\,;+\infty[$.

**Résolution :**

$(1) \Leftrightarrow (\ln x)^3 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x\left((\ln x)^2 - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x \times (\ln x - 1) \times (\ln x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x - 1 = 0$ ou $\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x - 1 = 0$ ou $\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln 1$ ou $\ln x = \ln \mathrm{e}$ ou $\ln x = \ln \frac{1}{\mathrm{e}}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \mathrm{e}$ ou $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$

---

**II.**

1°) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2°) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution.

3°) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2 - 3x$.

4°) Le minimum de *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $-\frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

5°) L'équation $f(x) = -0,04$ admet 2 solutions.

6°) $f''(x) = (4 - x)\mathrm{e}^{-x}$

7°) Les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite *D* d'équation $y = 2(-x+2)$ ont pour abscisses

2 et – ln 2.

8°) La suite $(u_n)$ définie par $u_n = (2-n)\mathrm{e}^{-n}$ est croissante à partir de l'indice 3.

**Solution détaillée :**

1°) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} (-x+2) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{array}\right\}$ donc lorsque *x* tend vers + ∞, on rencontre une forme indéterminée du type

« 0 × ∞ ».

$\lim_{x \to +\infty} \left(x\mathrm{e}^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -x \times \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \left(-x\mathrm{e}^{-x}\right) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \left(2\mathrm{e}^{-x}\right) = 0 \end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme on a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2°)

On résout l'équation $f(x) = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow (-x+2)\mathrm{e}^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2 = 0$ ou $\mathrm{e}^{-x} = 0$ (impossible ; une exponentielle est toujours strictement positive)

$\Leftrightarrow x = 2$

3°) *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x+2) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$

$= (-1 + x - 2) \times \mathrm{e}^{-x}$

$= (x-3)\mathrm{e}^{-x}$

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2 - 3x$.

4°) Tableau récapitulatif :

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x-3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $\mathrm{e}^{-x}$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de *f* | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\mathrm{e}^{-3}$ | $\nearrow$ | $0$ |

Le minimum de *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $f(3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3} = -\mathrm{e}^{-3} = -\frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

$-\mathrm{e}^{-3}$ est la valeur exacte du minimum de *f* sur $\mathbb{R}$.

Beaucoup d'élèves ne savent pas ce qu'est une valeur exacte et une valeur approchée.

– 0,04 est une valeur approchée de $-\mathrm{e}^{-3}$. Ce n'est donc pas la valeur exacte du minimum.

Nous verrons que cela jouera un rôle dans la question suivante.

Complément pour la question suivante : limite de $f$ en $-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

5°) $f(x)=-0,04$

On ne peut pas résoudre cette équation par le calcul.

On va utiliser le théorème de valeurs intermédiaires.

Avec la calculatrice, on obtient : $-\mathrm{e}^{-3}=-0,0497870683...$
On constate avec la calculatrice que $-\mathrm{e}^{-3}<-0,04<0$.
(La valeur avait été choisie très légèrement supérieure à $-\mathrm{e}^{-3}$).

On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $]-\infty\,;3]$ et $[3\,;+\infty[$.

L'équation $f(x)=-0,04$ admet 2 solutions.

6°)

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+(x-3)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$
$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=(-x+4)\times\mathrm{e}^{-x}$

7°) Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $D$ d'équation $y=2(-x+2)$ sont les solutions de l'équation $(-x+2)\mathrm{e}^{-x}=2(-x+2)$ $(1)$.

$(1) \Leftrightarrow (-x+2)\mathrm{e}^{-x}-2(-x+2)=0$
$\Leftrightarrow (-x+2)\left(\mathrm{e}^{-x}-2\right)=0$
$\Leftrightarrow -x+2=0$ ou $\mathrm{e}^{-x}-2=0$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $\mathrm{e}^{-x}=2$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $-x=\ln 2$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-\ln 2$

8°) On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=(2-n)\mathrm{e}^{-n}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=f(n)$.

Le sens de variation de la suite $(u_n)$ est donné à partir de celui de $f$.

Or $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

Donc $(u_n)$ est strictement croissante à partir de l'indice 3.

## III.

### Partie A

1°) Exprimons en fonction de $x$ les longueurs des trajets 1 et 2.

$\mathrm{l}_1=\mathrm{IO}+\mathrm{ON}$
$=1+\cos x$ ($\mathrm{IO}=1$ et $\mathrm{ON}=\cos x$ par trigonométrie dans le triangle rectangle ION)

$\mathrm{l}_2=\mathrm{ON}+\mathrm{long}\left(\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right)$
$=1-\cos x+x$ ($\mathrm{N}\in[\mathrm{OM}]$ donc $\mathrm{NM}=\mathrm{OM}-\mathrm{ON}=1-\cos x$ ; $\mathrm{long}\left(\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right)=1\times x=x$)

On utilise la formule de la longueur d'un arc de cercle en fonction du rayon et de l'angle au centre :

Dans un cercle de centre O et de rayon $R$, la longueur d'un arc d'extrémités A et B est égale à $R\alpha$ où $\alpha$ désigne la mesure de l'angle au centre associé.

2°) Démontrons que les deux trajets 1 et 2 ont la même longueur si et seulement si $\cos x=\dfrac{x}{2}$.

Les trajets 1 et 2 ont la même longueur si et seulement si $\mathrm{l}_1=\mathrm{l}_2$ $(1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1+\cos x=1-\cos x+x$
$\Leftrightarrow 2\cos x=x$
$\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{x}{2}$

### Partie B

1°) On pose $u(x)=\cos x$ et $v(x)=\dfrac{x}{2}$.

$u$ et $v$ sont continues sur $J$.

Or $f=u-v$ donc $f$ est continue sur $J$.

2°) $u$ et $v$ sont dérivables sur $J$.

Or $f=u-v$ donc $f$ est dérivable sur $J$.

$\forall x\in J\quad f'(x)=-\sin x-\dfrac{1}{2}$

3°)

$\forall x\in J\quad 0\leqslant\sin x\leqslant 1$

Donc $\forall x\in J\quad -1\leqslant\sin x\leqslant 0$
$\forall x\in J\quad -\dfrac{3}{2}\leqslant-\sin x-\dfrac{1}{2}\leqslant-\dfrac{1}{2}$
Par suite, $\forall x\in J\quad f'(x)<0$.

On en déduit que $f$ est strictement décroissante sur $J$.

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | | – | | |
| Variation de $f$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{4}$ |

$f(0)=1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

4°) $f$ est continue sur $J$.
$f$ est strictement décroissante sur $J$.

On a : $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.

$f(J)=\left[-\frac{\pi}{4};1\right]$

(attention à bien remettre les bornes dans le bon ordre car la fonction $f$ est strictement décroissante sur $J$).

$0\in\left[-\frac{\pi}{4};1\right]$

Donc l'équation $(\mathrm{E})$ admet une unique solution $x_0$ dans $J$.

Remarque : On ne peut pas trouver la valeur exacte de $x_0$.

3°) Avec la calculatrice (mise en mode radian), on obtient : $f(1)=0,0403\ldots$ et $f(1{,}1)=-0,0096\ldots$.

On a $f(1)>0$ et $f(1{,}1)<0$.

Donc $f$ présente un changement de signe entre 1 et 1,1.
Par suite, comme $f$ est strictement décroissante sur $J$, on a : $1<x_0<1{,}1$.

Avec cet encadrement, on obtient un encadrement de la longueur commune aux deux trajets.

En effet, dans ce cas, $l_1=1+\frac{x_0}{2}$ (puisque $\cos x_0=\frac{x_0}{2}$).

On part de l'encadrement $1<x_0<1{,}1$.

On obtient alors : $0,5<\frac{x_0}{2}<0,55$.

En ajoutant 1 à chaque membre, on obtient : $1,5<1+\frac{x_0}{2}<1+0,55$.

D'où $1,5<l_1<1,55$.

**Remarque :** En utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve $x_0=1{,}0298666\ldots$

Cela permet de trouver une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ pour laquelle les deux trajets ont la même longueur.

On convertit en multipliant le résultat par 180 et en divisant le résultat par $\pi$.

L'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ mesure environ à 59,007 °.

## Partie C

1°) L'algorithme donné dans l'énoncé permet de déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude inférieure ou égale à 0,0001.

2°) En réalisant le programme sur calculatrice, on obtient :
$a=1{,}029785156$
$b=1{,}629882813$

**Programme :**

```
1 → A
1,1 → B
While B – A > 0,0001
 (A+B)/2 → X
If cos X > X/2
Then X → A
     X → B
If End
While End
A ◢
B ◢
```

---

## IV.

$f:x\mapsto\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ ($a$, $b$, $c$ réels)

$\mathcal{C}$ : courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$

$\mathrm{H}_1$ : $\mathrm{A}(0;1)\in\mathcal{C}$
$\mathrm{H}_2$ : $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe (O$x$) au point d'abscisse 1
$\mathrm{H}_3$ : $f'(0)=-6$

Déterminons les valeurs de $a$, $b$, $c$.

On traduit les hypothèses.

$\mathrm{H}_1$ : donne $f(0)=1$.

Donc $\left(a\times0^2+b\times0+c\right)\mathrm{e}^{-0}=1$
Par suite, $c=1$.

Pour traduire les hypothèses $\mathrm{H}_2$ et $\mathrm{H}_3$, on a besoin de la dérivée de $f$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (2ax+b)\times e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c)$$
$$= (2ax+b-ax^2-bx-c)\times e^{-x}$$
$$= (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\times e^{-x}$$

$H_2$ donne $f'(1)=0$ donc $(-a\times 1^2+(2a-b)\times 1+b-c)\times e^{-1}=0$.
Cette dernière égalité conduit successivement aux égalités suivantes :
$(-a+2a-b+b-c)\times e^{-1}=0$
$(a-c)\times e^{-1}=0$
$a-c=0$ (car $e^{-1}\neq 0$)
D'où $a=c$.

On obtient donc $a=1$.

$H_3$ ($f'(0)=-6$) donne $(-a\times 0^2+(2a-b)\times 0+b-c)\times e^{-0}=-6$
$(b-c)\times e^{-0}=-6$
$b-c=-6$
$b-1=-6$
$b=-5$

**Bilan :**

$a=c=1$ et $b=-5$

---

## V.

1°) Chaque carré est une réduction de coefficient $\frac{3}{4}$ du carré précédent (la longueur de chaque côté est égale à la longueur du carré précédent multipliée par $\frac{3}{4}$).

Donc l'aire de chaque carrée est égale à l'aire du carré précédent multipliée par $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ c'est-à-dire $\frac{9}{16}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{9}{16}u_n$.

La suite $(u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{9}{16}$.

2°)

$$S_n = 1\times\frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{9}{16}}$$ (formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

$$= \frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{\frac{7}{16}}$$

$$= \frac{16}{7}\times\left[1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}\right]$$

3°) Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n<\frac{16}{7}$.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad \left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}>0$ d'où $\forall n\in\mathbb{N} \quad -\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}<0$.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad 1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}<1$

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{16}{7}\left[1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}\right]<\frac{16}{7}$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n<\frac{16}{7}$.

---

## VI.

### Partie A

1°) **V.** Le couple $(e\,;e)$ appartient à $E$.

2°) **V.** Le couple $\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$ appartient à $E$.

3°) **F.** Le couple $(1\,;1)$ n'appartient pas à $E$.

4°) **V.** Si le couple $(x\,;y)$ appartient à $E$ alors le couple $(-x\,;-y)$ appartient à $E$.

**Partie B (hors barème)**

Elle était plus difficile et nécessitait plus de recherche.

$F$ : ensemble des points M($x$, $y$) tels que $\left(\ln|\,x\,|\right)^2 + \left(\ln|\,y\,|\right)^2 = 2$.

1°) Démontrons que $F$ admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour axe de symétrie.

Soit $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ un point quelconque du plan.
On note $\mathrm{M}'\left(x'\,;\,y'\right)$ son symétrique par rapport à la droite Δ.

On a : $x' = y$ et $y' = x$.

Si on suppose que $\mathrm{M} \in E$, alors $\left(\ln|\,x\,|\right)^2 + \left(\ln|\,y\,|\right)^2 = 2$ donc $\left(\ln|\,y'\,|\right)^2 + \left(\ln|\,x'\,|\right)^2 = 2$
Cette dernière égalité s'écrit aussi $\left(\ln|\,x'\,|\right)^2 + \left(\ln|\,y'\,|\right)^2 = 2$ ce qui permet d'en déduire que $\mathrm{M} \in F$.

On en déduit que $F$ admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour axe de symétrie.

2°) $a = \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$
$D$ : carré défini par $-a \leqslant x \leqslant a$ et $-a \leqslant y \leqslant a$

Démontrons que $F \subset D$.

Soit $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ un point quelconque de $F$.

On a alors : $\left(\ln|\,x\,|\right)^2 + \left(\ln|\,y\,|\right)^2 = 2$.

Par suite, $\left(\ln|\,x\,|\right)^2 \leqslant 2$ et $\left(\ln|\,y\,|\right)^2 \leqslant 2$.

Donc, $\ln|\,x\,| \leqslant \sqrt{2}$ et $\ln|\,y\,| \leqslant \sqrt{2}$.

D'où $|\,x\,| \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ et $|\,y\,| \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.

Finalement, on obtient : $-a \leqslant x \leqslant a$ et $-a \leqslant y \leqslant a$.
On en déduit que $F \subset D$.