$1^{\text{ère}}$ S

Révisions pour le contrôle commun du mardi 15 novembre 2011

1 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto |x| + |x-4|$.
Démontrer que la fonction *f* est constante sur [0 ; 4].

2 **Questions rapides sans justification**

1°) Donner la forme canonique du polynôme $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$.	
2°) Donner le signe du polynôme $Q(x) = x^2 - x + 2$.	
3°) Soit *u* une fonction définie sur l'intervalle [– 5 ; 5]. Donner l'ensemble de définition de la fonction *v* définie par $v(x) = u(2x-1)$.	
4°) Calculer le discriminant réduit Δ' du polynôme $x^2 - 2kx + 1$ (où *k* est un réel).	

3 Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Partie A

1°) a) Démontrer que *f* est bien définie sur ℝ.
b) Étudier la parité de *f*. (Indication : comparer $f(-x)$ et $f(x)$).

2°) Soit *a* et *b* appartenant à [0 ; + ∞[tels que $a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$; en déduire le sens de variation de *f* sur [0 ; + ∞[.
Donner sans justifier le sens de variation de *f* sur]– ∞ ; 0].

Partie B

On considère la fonction *g* définie par $g(x) = \frac{2x^2+1}{2x^2+2}$.

1°) Démontrer que pour tout réel *x* on a $g(x) = 1 - \frac{f(x)}{2}$

2°) Déduire de l'égalité précédente et des résultats de la partie A les variations de *g*.

4 On considère le polynôme $P(x) = 2(x-9)(4-x)$.

1°) Donner sans justifier la forme développée de $P(x)$.

2°) On considère la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = \frac{1}{-2x^2+10x-8} + \frac{1}{4-x}$.
a) Donner l'ensemble de définition ***D*** de *f*.
b) Pour $x \in$ ***D***, écrire $f(x)$ sous la forme d'un seul quotient dont le dénominateur est un polynôme du second degré.
3°) On pose $Q(x) = -2x^4 + 10x^2 - 8$.
a) Factoriser $Q(x)$ en produit de 4 facteurs du premier degré.
b) Résoudre dans ℝ

- l'équation $Q(x) = 0$
- l'inéquation $Q(x) > 0$.

5 On considère le polynôme : $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$.

1°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a : $P(x) = x^2(x+2)^2 - 1$.
2°) Déduire du 1°) une factorisation de $P(x)$ en produit de deux polynômes du second degré.
3°) Résoudre dans ℝ l'équation $P(x) = 0$ (E).

6 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

7 Résoudre dans ℝ l'équation : $(x^2 + 2x - 1)^2 - 9 = 0$ (E).

8 On considère le polynôme $P_m(x) = mx^3 + (4-m)x^2 + 2(m-3)x - 2(m-1)$ où *m* est un réel.

Démontrer que, pour tout réel *m*, 1 est racine de $P_m(x)$.

9 1°) Donner le tableau de signe du polynôme $P(x) = 3 + x - 2x^2$.

2°) En déduire sans calcul le signe de $P\left(-\frac{1}{3}\right)$; $P(-10)$ et $P(\sqrt{13})$.

10 Déterminer deux entiers naturels consécutifs dont la somme de leurs carrés soit égale à 3281.

11 Développer les expressions $A(x) = (3x^2 - 2x - 5)^2$ et $B(x) = -2(3x^2+2)^2 - (2x-1) \times (2x+1)^3$.
Vérifier les résultats avec le logiciel *XCas*.

12 Étudier la position relative de la courbe ***C*** d'équation $y = -x^2 + 4x + 2$ et de la droite *D* d'équation $y = 2x + 1$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer la courbe et la droite à l'aide du logiciel *Geogebra* et vérifier graphiquement les résultats obtenus.

13 Étudier par le calcul la position relative des courbes ***C*** et ***C***' d'équations respectives $y = x^2 - 6x + 7$ et $y = -x^2 + 4x - 1$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer les courbes à l'aide du logiciel *Geogebra* et vérifier graphiquement les résultats obtenus.

14 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(x^2+1\right)^2-5\left(x^2+1\right)+6=0$ (1).

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3x-1>\dfrac{4}{x}$ (2).

15 **Formes canonique d'un polynôme du second degré**

Donner la forme canonique des polynômes.

1°) Niveau 1

$A=x^2-8x+5$; $B=x^2-6x+1$; $C=x^2-8x+2$; $D=x^2-2x-7$

2°) Niveau 2

$E=2x^2-3x+1$; $F=6x-x^2$; $G=x^2-2x\sqrt{3}+5$; $H=3x^2-x-2$; $I=-\dfrac{1}{2}x^2+x+3$

Réponses

10 40 et 41.

11 $\mathrm{A}(x)=9x^4-12x^3-26x^2+20x+25$ $\mathrm{B}(x)=-16x^4-16x^3+4x-3$

15 1°) $A=(x-4)^2-9$; $B=(x-3)^2-8$; $C=(x-4)^2-14$; $D=(x-1)^2-8$

2°) $E=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$