TS1

Contrôle du mercredi 5 octobre 2011 (2 h)

Écrire très lisiblement et sans rature, sans utiliser d'abréviations. Encadrer en rouge tous les résultats demandés à la règle.

Au début de la copie aménager un cartouche de présentation avec les numéros des exercices qui permettra de reporter les points.

Ne rien écrire sur cette feuille en dehors de ce qui est demandé.

Faire les tableaux de variations et les flèches de variations à la règle (sans omettre les barres de séparation entre les lignes du tableau).

Écrire les barres de fractions horizontalement à la règle.

Prénom : .... **Nom : ....**

Dans les exercices **I** et **II**, aucune justification n'est demandée.
Donner les réponses dans les cadres prévus à cet effet (une seule réponse à chaque fois, la réponse ne doit pas déborder du cadre).

I. (4 points) On considère les équations et inéquations suivantes :

$\ln(x+1)=3 \quad (1) \quad ; \quad \ln(2x-1)+\ln 5 \geqslant 3 \quad (2) \quad ; \quad \mathrm{e}^{(3x^2)} \times \mathrm{e}^{-6x} = \left(\mathrm{e}^{2-x}\right)^2 \quad (3) \quad ; \quad \mathrm{e}^{-5x} < \dfrac{\mathrm{e}^{3-x}}{\mathrm{e}^{-5-2x}} \quad (4).$

On note S_1, S_2, S_3, S_4 les ensembles de solutions respectifs de (1), (2), (3), (4).

$S_1 =$	$S_2 =$ ....
$S_3 =$	$S_4 =$ ....

II. (4 points) On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$.

Donner l'ensemble de définition de f et g.
Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

L'ensemble de définition de f est :	$f'(x) =$ ....
L'ensemble de définition de g est :	$g'(x) =$ ....

III. (3 points) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 2 + 5x\ln x$ et $g : x \mapsto \dfrac{\ln x - 2}{x}$ définies sur $]0\,;+\infty[$.

En utilisant des limites de référence du cours (indiquer clairement « limite de référence » à chaque fois), déterminer :

- la limite de f en 0^+ ;
- la limite de g en 0^+ et en $+\infty$.

Respecter la présentation avec accolades : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (\ldots) = \ldots \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (\ldots) = \ldots \end{array}\right\}$ donc par limite … $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots$.

IV. (9 points) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$.

1°) Dresser le tableau de variation sans les limites de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ (pour étudier le signe de la dérivée, on résoudra deux inéquations et une équation).
En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3°) En observant que pour tout réel x non nul, on a $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

4°) Calculer $f'(x)$ (sans donner tout le détail du calcul).
Donner le résultat sous forme factorisée. Tirer les traits de fraction à la règle.

5°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Faire figurer dans le tableau les limites et la valeur exacte de l' (ou des) extremum(s).
Faire le tableau ainsi que les flèches de variations à la règle.

6°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Quelques « modèles » de rédaction pour les fonctions :

1. « L'équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ s'écrit ……………………. »

2. « La fonction f est dérivable sur …. comme …. . »

3. « Pour tout $x \in \ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$ » (on peut utiliser le quantificateur $\forall$).

Corrigé du contrôle du 5-10-2011

I. Résolutions d'équations et d'inéquations avec des logarithmes et des exponentielles

$S_1=\left\{e^3-1\right\}$	$S_2=\left[\dfrac{e^3+5}{10}\,;+\infty\right[$
$S_3=\left\{2\,;-\dfrac{2}{3}\right\}$	$S_4=\left]-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$

$\ln(x+1)=3 \qquad (1)$

C.E. :

On doit avoir $x+1>0$ soit $x>-1$.
On résout l'équation dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln\left(e^3\right)$

$\Leftrightarrow x+1=e^3$

$\Leftrightarrow x=e^3-1$

$\ln(2x-1)+\ln 5\geqslant 3 \qquad (2)$

C.E. :

On doit avoir $2x-1>0$ soit $x>\dfrac{1}{2}$.

On résout l'équation dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

$(2) \Leftrightarrow \ln\left[5(2x-1)\right]\geqslant\ln\left(e^3\right)$

$\Leftrightarrow \ln(10x-5)\geqslant\ln\left(e^3\right)$

$\Leftrightarrow 10x-5\geqslant e^3$

$\Leftrightarrow 10x\geqslant e^3+5$

$\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{e^3+5}{10}$

Toutes les valeurs supérieures ou égales à ……. sont dans l'ensemble de résolution.

$e^{\left(3x^2\right)}\times e^{-6x}=\left(e^{2-x}\right)^2 \qquad (3)$

$(3) \Leftrightarrow e^{\left(3x^2-6x\right)}=e^{4-2x}$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x=4-2x$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-4=0$

On calcule le discriminant réduit du polynôme $3x^2-4x-4$.

$\Delta'=4-3\times(-4)$

$=16$

$\Delta'>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1=\dfrac{2+4}{3} \qquad x_2=\dfrac{2-4}{3}$

$x_1=2 \qquad x_2=-\dfrac{2}{3}$

On peut aussi dire que 2 est une racine évidente et trouver l'autre par produit.

$e^{-5x}<\dfrac{e^{3-x}}{e^{-5-2x}} \qquad (4)$

$(4) \Leftrightarrow e^{-5x}<e^{8+x}$

$\Leftrightarrow -5x<8+x$

$\Leftrightarrow -6x<8$

$\Leftrightarrow x>-\dfrac{8}{6}$

$\Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{3}$

II. Ensembles de définition et dérivées

$f : x\mapsto\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}$	L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{\dfrac{1}{e}\right\}$.	$f'(x)=\dfrac{2}{x(\ln x+1)^2}$
$g : x\mapsto\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$	L'ensemble de définition de g est $]1\,;+\infty[$.	$g'(x)=\dfrac{1-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

Solution détaillée :

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x+1\neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq -1 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\times(\ln x+1)-(\ln x-1)\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{x}}{(\ln x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$$

$g : x\mapsto \dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$

$g(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>1 \\ x\neq 1 \end{cases}$

si et seulement si $x>1$

$$g'(x)=\frac{\dfrac{1}{x-1}\times(x-1)-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

III. Calculs de limites

$f : x\mapsto x^2-2+5x\ln x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(5x\ln x)=0 \ ^* \end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-2$.

* limite de référence

$g : x\mapsto \dfrac{\ln x-2}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-2)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+ \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}$ (on est obligé de faire une réécriture car on rencontre une FI en $+\infty$)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \ ^* \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=0 \end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

IV.

1°) Étudions le sens de variation de la fonction $g : x\mapsto \mathrm{e}^x-x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=\mathrm{e}^x-1$

Étudions le signe de e^x-1 suivant les valeurs de x.

Méthode : Pour étudier le signe de cette expression, on résout deux inéquations et une équation.

$\mathrm{e}^x-1>0\quad(1)$	$\mathrm{e}^x-1<0\quad(2)$	$\mathrm{e}^x-1=0\quad(3)$
$(1)\Leftrightarrow \mathrm{e}^x>1$ $\Leftrightarrow x>0$	$(2)\Leftrightarrow \mathrm{e}^x<1$ $\Leftrightarrow x<0$	$(3)\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=1$ $\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		↘	1	↗	

La dérivée s'annule pour $x=0$.
$g(0)=\mathrm{e}^0-0=1-0=1$

D'après le tableau de variation, g admet un* minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 1 (obtenu pour $x=0$).

On peut donc en conclure que $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)\geqslant 1$ soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^x-x\geqslant 1$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur ne s'annule pas d'après l'étude de la fonction g faite précédemment.

2°)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x-x\right)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

3°) $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

4°)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-x\right)-\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\left(\mathrm{e}^x-x\right)^2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\left(\mathrm{e}^x-x\right)^2}$$

5°)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de e^x		$+$		$+$	
Signe de $1-x$		$+$	0	$-$	
Signe de $\left(\mathrm{e}^x-x\right)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$	↘	1

La dérivée de f s'annule pour $x=1$.

$$f(1)=\frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^1-1}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

6°) Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 s'écrit : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.
Or $f(0)=1$ et $f'(0)=1$.
Donc T a donc pour équation $y=x+1$.

Question supplémentaire que j'aurais dû mettre en bonus : étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-(x+1)=\frac{\mathrm{e}^x-\left(\mathrm{e}^x-x\right)(1+x)}{\mathrm{e}^x-x}$$
$$=\frac{x\left(x+1-\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x-x}$$

$\mathrm{e}^x-x>0$

$x+1-\mathrm{e}^x\leqslant 0$

Donc
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de T sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
- $\mathcal{C}$ et T sont sécantes au point A.

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente d'inflexion au point au point A (car le il y a un changement de position de $\mathcal{C}$ par rapport à T).