Les connecteurs logiques « ou » et « et »

« ET », « OU » en mathématiques

1. Dans le langage courant :

• « et » est employé avec différentes significations (« et en plus » : un cahier et un stylo et ... , « et puis » : je finis mon travail et je viens te voir, « à la fois » : une mer chaude et calme ; parfois même, le mot « et » prend un sens conditionnel : « un pas de plus et tu tombes » signifie « si tu fais un pas de plus, tu tombes », « un mot de plus et tu prends mon poing dans la tronche »).

• « ou » est aussi employé avec différentes significations, mais le plus souvent, il sert à désigner deux possibilités qui s'excluent l'une l'autre (« fromage ou dessert » sur un menu ne permet pas de prendre les deux !).

2. En mathématiques, « OU » et « ET » ont des significations très précises !

La proposition « P **ET** Q » est vraie quand P et Q sont toutes les deux vraies et uniquement dans ce cas.

La proposition « P **OU** Q » est vraie quand au moins l'une des deux est vraie (l'une ou l'autre, voire les deux).

Exemples :

• La proposition P : « $x < 3$ ET $x > 1$ » signifie « $1 < x < 3$ ».
Elle est vraie pour tous les nombres x appartenant à]l ; 3[, fausse pour les autres.

• La proposition Q : « m est pair OU multiple de 3 » est vraie pour $m = 4$ (4 est pair, non multiple de 3), vraie pour $m = 9$ (9 est multiple de 3 mais pas pair) et vraie pour $m = 12$ (12 est pair et aussi multiple de 3).
La proposition est fausse pour $m = 5$ (ni pair ni multiple de 3).

3. Du point de vue des ensembles

On note A et B deux parties d'un ensemble E.

• **ET** est associé à l'intersection : « $x \in$ A **ET** $x \in$ B » signifie « $x \in$ A $\cap$ B ».

• **OU** est associé à la réunion : « $x \in$ A **OU** $x \in$ B » signifie « $x \in$ A $\cup$ B ».

4. Négation d'une proposition avec OU et ET (lois de Morgan)

• La négation de « P OU Q » est « négation de P ET négation de Q ».

• La négation de « P ET Q » est « négation de P OU négation de Q ».

Exemples :

• P : « $x < 3$ ET $x > 1$ »

La négation de P est « $x \geqslant 3$ OU $x \leqslant 1$ ».

• Q : « m est pair OU multiple de 3 »

La négation de Q est « m n'est pas pair ET n'est pas multiple de 3 ».

5. Remarque

L'**accolade** en mathématiques (utilisée dans les systèmes d'équations et d'inéquations) signifie « et ».

Il n'y a pas d'équivalent pour le « ou » ; on utilise parfois un trait ondulé vertical et l'on écrit « ou » entre les lignes.

6. Les symboles « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal »

Lire les feuilles spéciales consacrées à ces symboles.

7. Pour aller plus loin : tables de vérité

• Proposition *P* ou *Q*

P	***Q***	***P* ou *Q***
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**La proposition « *P* ou *Q* » est vraie uniquement lorsque l'une des deux propositions au moins est vraie ;
Elle est fausse lorsque les deux propositions sont fausses.**

• Proposition *P* et *Q*

P	***Q***	***P* et *Q***
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

**La proposition « *P* et *Q* » est vraie uniquement lorsque les deux propositions sont vraies.
Elle est fausse dans tous les autres cas.**

On démontre grâce aux tables de vérité les lois de Morgan c'est-à-dire que :

• La proposition « non(P ou Q) » est équivalente à « non(P) et non(Q))».
• La proposition « non(P et Q) » est équivalente à « non(P) ou non(Q))».

8. Distributivité du « ou » sur le « et » et du « et » sur le « ou »

Soit P, Q, R trois propositions.

On démontre en utilisant les tables de vérité que :

• La proposition « P ou (Q et R) » est équivalente (le sens de ce mot sera précisé dans un autre chapitre) à la proposition « (P ou Q) et (P ou R) ».

• La proposition « P et (Q ou R) » est équivalente (le sens de ce mot sera précisé dans un autre chapitre) à la proposition « (P et Q) ou (P et R) ».

9. Attention, en mathématiques, le « ou » peut être exclusif ou inclusif alors qu'en français il est seulement exclusif.

Exemples :

« Demain matin, je pars à Lyon ou Lille » (ou bien, exclusif)

« Je tire une carte rouge ou un as » (inclusif)

- soit je tire une carte rouge et pas un as
- soit je tire un as non rouge ;
- soit je tire un as rouge.

10. Dans une phrase, les mots « ou » et « et » ne sont pas interchangeables

Exemple :

« $xy = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$ »

On ne peut pas remplacer le ou par un et (même s'il y a deux variables)

11. Culture : les moteurs de recherche utilisent le ET et le OU logique.

Si on recherche un livre sur un catalogue électronique d'une bibliothèque, en tapant dans le champ « auteur » : « George OU Boole » on obtient la liste de tous les ouvrages écrits par des auteurs dont le nom contient George ainsi que ceux dont le nom contient Boole. Parmi eux figurent bien sûr ceux dont le nom contient George Boole.
La même requête avec « George ET Boole» n'aurait renvoyé que les livres écrits par George Boole.

Exercices

$\boxed{1}$ **ET/OU**

Donner les entiers de 0 à 20 qui sont :

a. pairs ET multiples de 5

b. pairs OU multiples de 5

c. strictement supérieurs à 2 ET strictement inférieurs à 8

$\boxed{2}$ **ET/OU**

Pour $x = 4$, les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $x > 0$ ET $x < 5$

b. $x < 0$ OU $x > 3$

c. $x = 3$ OU $x > 3$

d. $x \geqslant 4$

$\boxed{3}$ Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. « (2 < 4) ET $\left(3^2 = 9\right)$ »

b. « (5 est divisible par 3) OU (5 est un entier pair) »

c. « (4 est un entier pair) OU (1 + 1 = 1) »

Solutions

$\boxed{\mathbf{1}}$

a. Les entiers de 0 à 20 qui sont pairs ET multiples de 5 sont **0 ; 10 ; 20**.

b. Les entiers de 0 à 20 qui sont pairs OU multiples de 5 sont **0 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20**.

c. Les entiers de 0 à 20 qui sont strictement supérieurs à 2 ET strictement inférieurs à 8 sont **3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7**.

$\boxed{\mathbf{2}}$

Pour $x = 4$

a. La proposition ($x > 0$ ET $x < 5$) est **VRAIE**.

b. La proposition ($x < 0$ OU $x > 3$) est **VRAIE**.

c. La proposition ($x = 3$ OU $x > 3$) est **VRAIE**.

d. La proposition ($x \geqslant 4$) est **VRAIE**.