

Exercices sur fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Réponses

1 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln x - 1$.

2 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2\ln x + \ln(2x+1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$.

3 Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = \ln 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

4 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+1}$.

5 1°) Etudier les variations de la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. La calculatrice est autorisée.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 7$, on a : $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$.

6 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{\sqrt{x}} = \sqrt{e^x}$.

7 Soit a un réel strictement positif, distinct de 1, fixé.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $a^{2x-1} < a^{x+2}$.

8 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $3^{(2^x)} < 2^{(3^x)}$.

9 1°) Démontrer que pour tout couple (a, b) de réels, on a : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

2°) On pose $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

Déterminer une équation du troisième degré à coefficients entiers vérifiée par α .

10 Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $2^n \geq n^2$.

On pourra étudier la fonction $f: x \mapsto x \ln 2 - 2 \ln x$.

11 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

12 Résoudre dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ le système $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases}$ où a est un réel strictement positif donné.

1 $\mathcal{D} =]1; +\infty[$

$$S = \left] 1, \sqrt{\frac{e}{e-1}} \right[$$

2 $\mathcal{D} =]1; +\infty[$

$$-3x^2 + 14x - 8 = 0$$

Les solutions sont $\frac{2}{3}$ et 4.

$$S = \{4\}$$

3 $2y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$

$$(y-2)(2y^2 + 3y + 2) = 0$$

La solution du système est le couple (4, 2).

4 $x = \frac{\ln 6}{\ln \frac{3}{2}}$

9 2°) $\alpha^3 = 4 + 3\alpha$ donc $\alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0$.

12 $a=1$ Le système est toujours vérifié pour $x=y$. $a \neq 1$ $x = a^{\frac{1}{a-1}}$.