$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 30 septembre 2011
(une heure)

Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume.
Il est demandé de ne pas employer le symbole ⇔.

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note :

…… /40 = …… /20

I. (2 points) Questions de cours

1°) Compléter la propriété suivante où x et y désignent deux réels quelconques. $|x \times y| =$ ………………………

2°) Soit a un réel strictement positif. Compléter la propriété suivante où x désigne un réel.

$|x| \leqslant a$ si et seulement si ……………………………………….

II. (12 points) On considère les équations et inéquations suivantes :
$2|x-3|-1=0$ (1) ; $4-|x|<0$ (2) ; $|x+8|\geq 8$ (3) ; $|2x-1|=|x+1|$ (4).
On note S_1, S_2 , S_3, S_4 les ensembles de solutions respectifs de (1), (2), (3), (4).

S_1 = ……….……………	S_2 = ……….……………	S_3 = ……….……………	S_4 = ……….……………

III. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto ||x|-4|$.
Dans cet exercice, on demande uniquement les réponses sans aucune justification.
1°) Calculer $f(-2)$ et $f\left(\sqrt{3}-4\right)$. Donner directement les résultats sans détailler les calculs.
2°) Déterminer les antécédents de 0 par f.

1°) $f(-2)$ = ………. ; $f\left(\sqrt{3}-4\right)$ = ………..

2°) Les antécédents de 0 par f sont …………….…………

IV. (3 points) Soit A, B, C trois points non alignés du plan.
Indiquer dans la colonne de droite si l'égalité proposée est vraie (V) ou fausse (F) sans justifier.

Égalité	Réponse
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	
AB + BC = AC	
$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$	

V. (2 points) Soit ABCD est un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées de D dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ du plan. D(……… ; ………)

Justifier à l'aide d'une égalité vectorielle. ……………………..………………………

VI. (6 points) Soit ABC un triangle quelconque. On note M le point tel que $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (1).
On pourra faire une figure au brouillon pour cet exercice.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2°) Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que M ∈ (AI).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VII. (9 points) Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ quelconque, on considère les points A(3, 2), B(– 2, 3), C(– 4, 0) et E(10, 4) (figure à faire au brouillon).

On soignera particulièrement la présentation des calculs et la rédaction dans cet exercice.

1°) Déterminer les coordonnées $\left(x_{\mathrm{D}}, y_{\mathrm{D}}\right)$ du point D tel que ABCD soit un parallélogramme (calculs en système).

2°) On note I le milieu de [DE]. Démontrer que les points A, B, I sont alignés.

3°) On note J le centre du parallélogramme ABCD. Démontrer sans calculs que (IJ) // (BE).

4°) Question bonus : que représente le point A pour le triangle BDE ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VIII. (2 points) Algorithmique

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
Répondre sans faire de phrase en donnant uniquement les résultats.

Quelle est la valeur de *y* affichée en sortie si les valeurs de *a* et *b* en entrée sont respectivement :

2 et 3 ? …………………..

1 et – 3 ? …………………..

Que remarque-t-on ?

On remarque que ……………………………………………………………………………

Entrées
Saisir *a* et *b*.

Traitement
Si $a \geqslant b$, alors
  y prend la valeur $2a + b$
Sinon
  y prend la valeur $a - b$
FinSi

Sortie
Afficher *y*

Corrigé du contrôle du 30 septembre 2011

I. (2 points) Questions de cours

1°) $|x \times y| =$ $|x| \times |y|$

2°) $|x| \leqslant a$ si et seulement si $-a \leqslant x \leqslant a$

II. Résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues

$2|x-3|-1=0$ (1) ; $4-|x|<0$ (2) ; $|x+8|\geq 8$ (3) ; $|2x-1|=|x+1|$ (4).

$S_1 = \left\{\frac{5}{2}\,;\frac{7}{2}\right\}$	$S_2 = \left]-\infty\,;-4\right[\cup\left]4\,;+\infty\right[$	$S_3 = \left]-\infty\,;-16\right]\cup\left[0\,;+\infty\right[$	$S_4 = \{0\,;2\}$

Résolution détaillée :

(1) est successivement équivalente à :

$|x-3| = \frac{1}{2}$

$x-3=\frac{1}{2}$ ou $x-3=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{7}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$

(2) est successivement équivalente à :

$|x| > 4$

$x < -4$ ou $x > 4$

(3) est successivement équivalente à :

$x + 8 \leqslant -8$ ou $x + 8 \geqslant 8$

$x \leqslant -16$ ou $x \geqslant 0$

(4) est successivement équivalente à :

$2x - 1 = x + 1$ ou $2x - 1 = -(x + 1)$ (il n'y a plus de barres de valeur absolue)
$x = 2$ ou $3x = 0$
$x = 2$ ou $x = 0$

III. $f : x \mapsto ||x| - 4|$ (valeur absolue de valeur absolue)

1°) $f(-2) = 2$; $f\left(\sqrt{3}-4\right) = \sqrt{3}$

2°) Les antécédents de 0 par f sont 4 et – 4.

Solution détaillée :

1°) $f(-2) = \big||-2|-4\big|$
$= |2-4|$
$= |-2|$
$= 2$

$f\left(\sqrt{3}-4\right) = \left|\left|\sqrt{3}-4\right|-4\right|$
$= \left|4-\sqrt{3}-4\right|$ (en effet : $\left|\sqrt{3}-4\right| = 4-\sqrt{3}$ car $4-\sqrt{3}<0$)
$= \left|-\sqrt{3}\right|$
$= \sqrt{3}$

2°) Les antécédents de 0 par f sont solutions de l'équation $f(x)=0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :
$|x| - 4 = 0$ (en effet, la valeur absolue d'un nombre est nulle si et seulement si ce nombre est égal à 0)
$|x| = 4$
$x = 4$ ou $x = -4$

On en déduit que les antécédents de 0 par f sont 4 et – 4.

IV.

Égalité	Réponse
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	**V**
AB + BC = AC	**F**
$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$	**V**

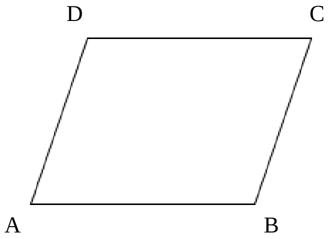
Justification de la 2^e ligne : La relation de Chasles est fausse pour les longueurs.

V. ABCD parallélogramme.

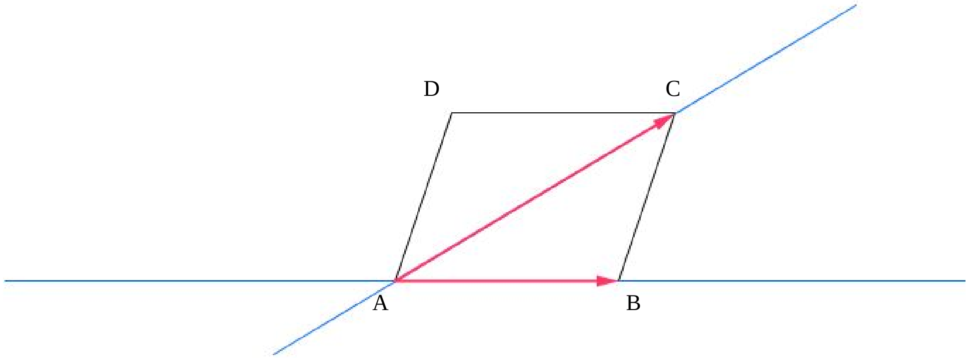
Coordonnées de D dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$: D(– 1; 1)

En effet, d'après la règle du parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

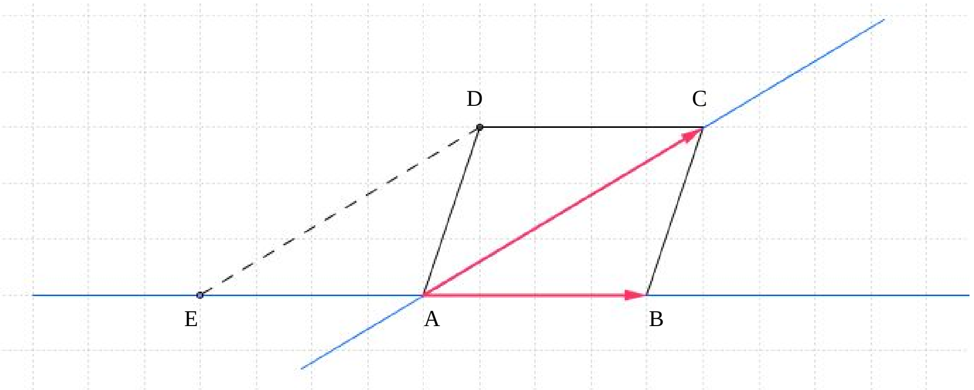
Donc $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (ou $\overrightarrow{AD}=-1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$)



Les axes du repère sont (AB) (axe des abscisses) et (AC) (axes des ordonnées).



On peut visualiser les coordonnées de D sur la figure ci-dessous en introduisant un point E, point d'intersection de la droite passant par D parallèle à (AC).
On démontre facilement que E est le symétrique de B par rapport à A.



VI. $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (1)

1°) Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

L'égalité (1) permet d'écrire successivement :

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$-5\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

2°) I : milieu de [BC]

Démontrons que M $\in$ (AI).

(2) donne : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)$$

Or I est le milieu de [BC] donc on a : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$.

D'après cette dernière égalité, on peut dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points A, M, I sont alignés.
Donc M $\in$ (AI).

VII. A(3, 2) B(– 2, 3) C(– 4, 0) E(10, 4)

1°) Déterminons les coordonnées (x_D, y_D) du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABDC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} x_D-3 \\ y_D-2 \end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}\right.$$

(1) donne $\begin{cases} x_D-3=-2 \\ y_D-2=-3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_D=1 \\ y_D=-1 \end{cases}$$

D(1 ; – 1)

On vérifie que les coordonnées sont justes sur une figure.

2°) I : milieu de [DE].

Démontrons que les points A, B, I sont alignés.

I est le milieu de [DE] donc $I\left|\begin{array}{l}\frac{11}{2}\\ \frac{3}{2}\end{array}\right.$.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}-5\\ 1\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AI}\left|\begin{array}{l}\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$

On remarque que $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

D'après cette dernière égalité, on peut dire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points A, B, I sont alignés.

3°) J : centre du parallélogramme ABCD.
Démontrons sans calculs que (IJ) // (BE).

J est le centre du parallélogramme ABCD donc J est le milieu de [BD] et de [AC].
Dans le triangle BDE, J est le milieu de [BD] et I est le milieu de [DE].
Donc d'après le théorème des milieux*, on a : (IJ) // (BE).

* Théorème des milieux : dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

4°) Dans le triangle BDE, on sait que I est le milieu de [DE].
Donc (BI) est la médiane issue de B dans le triangle BDE.

De plus, $\overrightarrow{BA}\left|\begin{array}{l}5\\ -1\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{BI}\left|\begin{array}{l}\frac{15}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

On en déduit que $\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
Le point A est donc situé sur la médiane [AI] aux deux tiers à partir du sommet B.
On en déduit que A est le centre de gravité du triangle BDE.

On peut aussi démontrer que A appartient à deux médianes du triangle BDE.

VIII. Algorithmique

La valeur de y affichée en sortie si les valeurs de a et b en entrée sont respectivement 2 et 3 est – 1.
La valeur de y affichée en sortie si les valeurs de a et b en entrée sont respectivement 1 et – 3 est – 1.

On remarque que la valeur affichée en sortie est la même dans les deux cas.