1$^{\text{ère}}$ S1

# Contrôle du lundi 17 octobre 2011
**(1 h 30)**

Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume.
Il est demandé de ne pas employer le symbole ⇔.

**Prénom et nom :** ……………………………………………………

**Note :**

…… /40 = …… /20

---

**I. (3 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$.

Écrire les conditions qui permettent d'assurer l'existence de $f(x)$.

$f(x)$ existent si et seulement si $\begin{cases} \text{………………………………} \\ \text{………………………………} \end{cases}$

En déduire après recherche au brouillon l'ensemble de définition de la fonction $f$.

L'ensemble de définition de $f$ est …………

---

**II. (8 points)**

**Partie 1**

Compléter le tableau ci-dessous donnant les variations des fonctions $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Faire les flèches de variations à la règle.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1-x$ | | | |
| $\dfrac{1}{1-x}$ | | \|\| | |

**Partie 2**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-x^2}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1°) Mettre sous forme canonique le polynôme $2x-x^2$. Donner le résultat sans détailler la démarche.

$$2x-x^2 = \text{………………………………..}$$

À l'aide de ce résultat, démontrer que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = x-1+\dfrac{1}{1-x}$ (1).

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

2°) En utilisant l'égalité (1) et le résultat de la partie 1, déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. Rédiger convenablement (voir indications de rédaction en fin d'énoncé)

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

---

**III. (4 points)** Déterminer le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [1\,;4]$.

$$\text{…………} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \text{…………}$$

L'amplitude de cet encadrement est égale à …………………

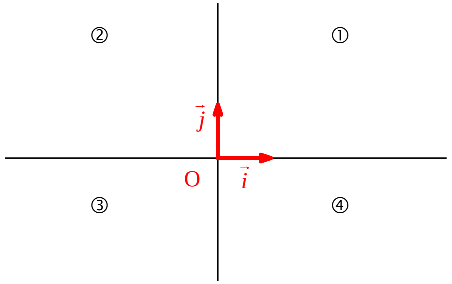
---

**IV. (8 points) QCM**

Donner la (ou les) bonne(s) réponse(s) sans justifier. Compléter le tableau de réponses sur l'énoncé.
Ne pas entourer les réponses choisies sur l'énoncé.

1°) On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{a}{x}$ où $a$ est un réel strictement négatif.

Les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous partagent le plan en quatre régions appelées **quadrants** (les frontières sont comprises). Ces quadrants sont numérotés ①, ②, ③, ④.




La courbe représentative de $f$ est située dans les quadrants :

a. ① et ③ b. ① et ② c. ② et ③ d. ② et ④

2°) Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont égales à la fonction homographique $x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$ ?

a. $x \mapsto \dfrac{-x+1}{-x}$ b. $x \mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ c. $x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x}$ d. $x \mapsto \dfrac{x-1}{-x}$

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction « racine carrée » dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à $\mathcal{C}$ ?

a. O b. A(4 ; 2) c. B(– 4 ; – 2) d. C(4 ; – 2)

4°) La fonction $f : x \mapsto |2x-1|$ correspond aux programmes de calcul :

a. $P_1 : x \xrightarrow{\text{multiplier par 2}} \ldots \xrightarrow{\text{soustraire 1}} \ldots \xrightarrow{\text{élever au carré}} \ldots \xrightarrow{\text{prendre la racine carrée}} \ldots$

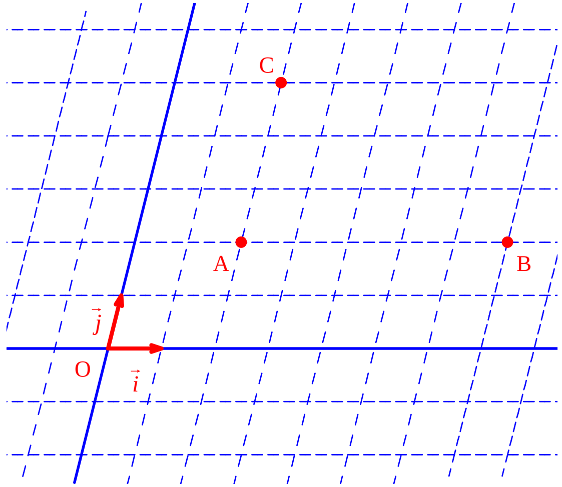
b. $P_2 : x \xrightarrow{\text{multiplier par - 2}} \ldots \xrightarrow{\text{ajouter 1}} \ldots \xrightarrow{\text{prendre la valeur absolue}} \ldots$

c. $P_3 : x \xrightarrow{\text{soustraire } \frac{1}{2}} \ldots \xrightarrow{\text{prendre la valeur absolue}} \ldots \xrightarrow{\text{multiplier par 2}} \ldots$

d. $P_4 : x \xrightarrow{\text{soustraire } \frac{1}{2}} \ldots \xrightarrow{\text{élever au carré}} \ldots \xrightarrow{\text{prendre la racine carrée}} \ldots \xrightarrow{\text{multiplier par 2}} \ldots$

| **Questions** | 1°) | 2°) | 3°) | 4°) | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Réponses** | …………….. | …………….. | …………….. | …………….. | **Total :** |

**V. (4 points)** Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(2, 2), B(7, 2), C(2, 5).




1°) Donner sans calcul et sans justifier une équation de chacune des droites (AB) et (AC).

(AB) : ………………………… (AC) : ……………………………..

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) en utilisant la colinéarité des vecteurs.
Rédiger complètement la recherche selon le modèle suivant en utilisant une chaîne d'équivalences :

Reprendre le modèle ci-contre :

« Soit M($x$, $y$) un point quelconque du plan.

M ∈ (BC) si et seulement si les vecteurs …… et …… sont colinéaires
si et seulement si ……………
si et seulement si …………… »

………………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………………………

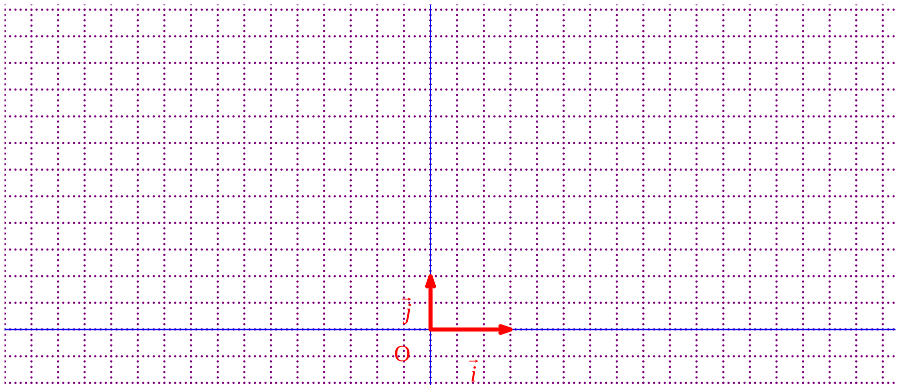
………………………………………………………………………………………………………………………

**VI. (5 points)** Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite $D$ d'équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$.

1°) La droite $D$ coupe l'axe des abscisses en un point A et l'axe des ordonnées en un point B.

Compléter sans justifier : $x_{\text{A}} =$ ………… $y_{\text{B}} =$ …………

Tracer $D$ sur le graphique ci-dessous.




2°) Compléter sans justifier la phrase suivante :

« Le vecteur $\vec{u}$ ( …… ; …… ) est un vecteur directeur de $D$. »

3°) Donner une équation cartésienne de la droite $D'$ passant par le point C$\left(4 \,;\, \dfrac{3}{2}\right)$ et parallèle à $D$.

$D'$ : ……………………………………………..

4°) Donner la valeur du coefficient directeur $m$ de $D$. $m =$ ……….

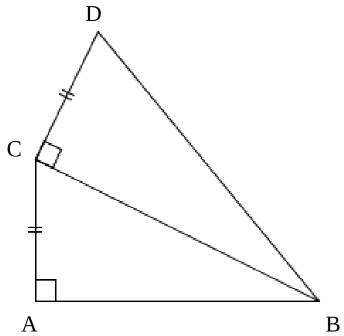
---

**VII. (2 points)** Soit ABC et BCD deux triangles rectangles respectivement en A et C ayant le côté [BC] en commun tels que AC = CD (voir figure ci-dessous). On pose $x$ = AC et $y$ = AB.

Exprimer BD en fonction de $x$ et $y$.

Ne pas détailler les calculs.

BD = ………………………….




**VIII. (4 points) Logique**

1°) On considère la proposition conditionnelle portant sur un réel $x$ :

| |
|---|
| Si $x \in \left]-1 \,;\, 2\right]$, alors $\lvert x \rvert \leqslant 2$. |

Cette proposition conditionnelle est-elle vraie ou fausse ? ☐ Vraie ☐ Fausse

Énoncer la réciproque de cette proposition.

| |
|---|
| Si ………………………, alors …………………….. |

Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? ☐ Vraie ☐ Fausse

2°) On considère la proposition conditionnelle suivante concernant deux droites $D$ et $D'$ de l'espace :

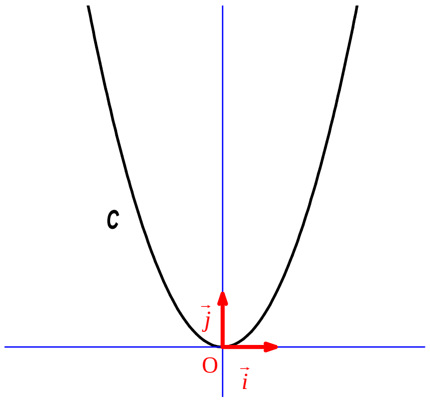
« Si $D$ et $D'$ sont sécantes, alors $D$ et $D'$ sont coplanaires. »

Cette proposition est vraie.

Énoncer la contraposée de cette proposition.

| |
|---|
| Si ………………………………………………………………………………., |
| alors ……………………………………………………………………………… |

**IX. (2 points)** Dans le plan $P$ muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction « carré ».
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan situés strictement au-dessus ou sur $\mathcal{C}$ (hachurer ce domaine sur le graphique ci-dessous).
On note $\mathcal{F}$ le complémentaire* (voir rappel) de $\mathcal{E}$ dans $P$. $\mathcal{F}$ est donc l'ensemble des points du plan situé au-dessous ou sur $\mathcal{C}$.




Compléter l'algorithme ci-dessous permettant de rentrer les coordonnées $(x, y)$ d'un point M du plan et d'afficher si ce point appartient à $\mathcal{E}$ ou à $\mathcal{F}$.

**Entrées :**

Saisir $x$ et $y$

**Traitement et sortie :**

**Si** …………… ,

**alors** afficher « M appartient à …………….. ».

**Sinon** afficher « M appartient à …………….. ».

**FinSi**

**Bonus :**

On considère l'équation $x^2 + 2ax + b = 0$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où $a$ et $b$ sont deux paramètres réels.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des points M($a$, $b$) du plan $P$ tels que l'équation (E) ait deux solutions distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$. Répondre en une phrase.

L'ensemble $\mathcal{G}$ est ……………………………………………………………………………………………

*Rappel de la définition du complémentaire d'une partie dans un ensemble :
Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments x de E qui n'appartiennent pas à A.

**Prénom et nom :** ………………………………………………………

**Note :**

…… /40 = **…… /20**

| | |
|---|---|
| **I.** | …………… / 3 |
| **II.** | …………… / 8 |
| **III.** | …………… / 4 |
| **IV. QCM** | …………… / 8 |
| **V.** | …………… / 4 |
| **VI.** | …………… / 5 |
| **VII.** | …………… / 2 |
| **VIII.** | …………… / 4 |
| **IX.** | …………… / 2 |

## Aide à la rédaction pour les fonctions (comment parler des variations d'une fonction) :

Voici quelques exemples de rédaction pouvant aider pour l'exercice II. Partie 2 2°) :

On s'intéresse aux variations de la fonction qui a tout réel $x$ associe $3x - 2$.
On peut rédiger de deux manières.

① On donne un nom à la fonction.

On pose $u(x) = 3x - 2$.
La fonction $u$ est une fonction affine. Le coefficient de $x$ est strictement positif (3) donc $u$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

② On ne donne pas de nom à la fonction.

La fonction $x \mapsto 3x - 2$ est une fonction affine. Le coefficient de $x$ est strictement positif (3) donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

# Corrigé du contrôle du 17 octobre 2011

**I.** $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$

**Conditions qui permettent d'assurer l'existence de *f* (*x*).**

On analyse les types de problèmes qui se posent : on a un quotient et une racine carrée.

*f* (*x*) existent si et seulement si $\begin{cases} 4-x \neq 0 \\ \dfrac{x}{4-x} \geq 0 \end{cases}$ (le dénominateur doit être non nul ; le radicande doit être positif ou nul)

**Ensemble de définition de la fonction *f*.**

On fait un tableau de signes pour trouver les valeurs de x qui vérifient l'inéquation $\dfrac{x}{4-x}$.

L'ensemble de définition de *f* est l'intervalle [0 ; 4[.

---

**II. (8 points)**

**Partie 1**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1-x$ * | + ↘ | 0 | ↘ − |
| $\dfrac{1}{1-x}$ ** | ↗ | \|\| | ↗ |

* On applique la règle du sens de variation d'une fonction affine.

** On applique la règle du sens de variation de l'inverse d'une fonction définie sur un intervalle et qui a un signe constant sur cet intervalle.

**Partie 2**

$f : x \mapsto \dfrac{2x-x^2}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$

*f* n'est pas une fonction homographique (c'est une fonction rationnelle).

1°) Forme canonique du polynôme $2x-x^2$.

$$2x-x^2 = -(x-1)^2+1$$

Démontrons que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = x-1+\dfrac{1}{1-x}$ (1).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} \quad f(x) &= \frac{2x-x^2}{1-x} \\ &= \frac{-(x-1)^2+1}{1-x} \\ &= \frac{-(x-1)^2}{1-x}+\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{-(x-1)(x-1)}{1-x}+\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{(1-x)(x-1)}{1-x}+\frac{1}{1-x} \\ &= x-1+\frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

2°) En utilisant l'égalité (1) et le résultat de la partie 1, déterminer le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle ]1 ; + ∞[. Rédiger convenablement (voir indications de rédaction en fin d'énoncé)

La fonction $x \mapsto x-1$ est une fonction affine. Le coefficient de *x* est strictement positif (1) donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur ]1 ; + ∞[.

D'après la partie 1, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est une fonction strictement croissante.

Attention : cette fonction est l'inverse d'une fonction affine mais on ne dit pas que c'est une fonction inverse (car il n'y a qu'une fonction inverse : c'est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

Or la somme de deux fonctions strictement croissante sur un intervalle est strictement croissante.

On en déduit que *f* est strictement croissante sur l'intervalle ]1 ; + ∞[.

On ne peut pas déduire le sens de variation de *f* en utilisant la forme initiale de *f*(*x*) ($\dfrac{2x-x^2}{1-x}$) ni en travaillant avec des inégalités.

**III.** Déterminons le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [1\ ;\ 4]$.

On procède par encadrements successifs.

$$1 \leqslant x \leqslant 4$$
$$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{4}$$
$$1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$$
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 1$$

L'amplitude de cet encadrement est égale à $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

---

**IV. QCM**

| Questions | 1°) | 2°) | 3°) | 4°) |
|---|---|---|---|---|
| Réponses | d | b | a, b | a, b, c, d |

---

**V.** A(2, 2) B(7, 2) C(2, 5)

1°) (AB) : $y = 2$ (AC) : $x = 2$

2°) Déterminons une équation cartésienne de la droite (BC) en utilisant la colinéarité des vecteurs.

Soit M($x$, $y$) un point quelconque du plan.

M $\in$ (BC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

si et seulement si ……………

si et seulement si ……………

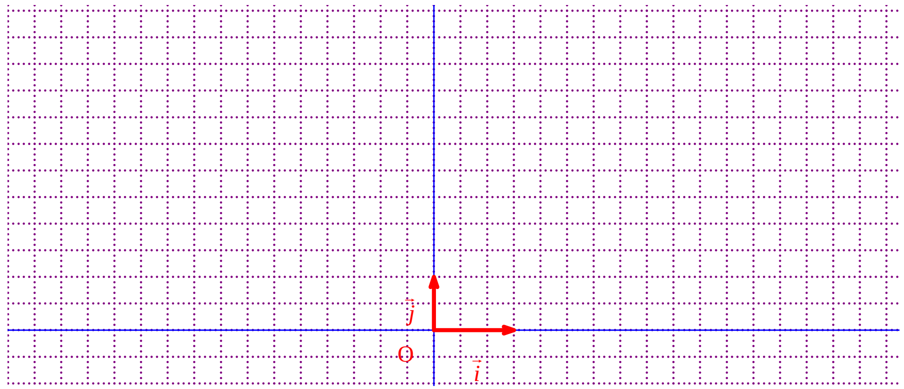
(BC) a pour équation $3\,x + 5\,y - 31 = 0$.

---

**VI.** $D : 3x + 2y - 5 = 0$

1°) $D \cap (Ox) = \{ A \}$ $D \cap (Oy) = \{ B \}$

$x_A = \dfrac{5}{3}$ $y_B = \dfrac{5}{2}$




2°) Le vecteur $\vec{u}\,(-2\ ;\ 3)$ est un vecteur directeur de $D$.

3°) $D'$ : droite passant par le point C($4\ ;\ \dfrac{3}{2}$) et parallèle à $D$

$$D' : 3x + 2y - 15 = 0$$

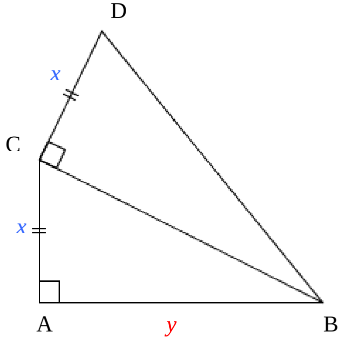
4°) Le coefficient directeur $m$ de $D$ est égal à $m = -\dfrac{3}{2}$.

Méthode : on passe l'équation cartésienne de $D$ en équation réduite.

$D$ a pour équation réduite : $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

On peut alors « lire » le coefficient directeur de $D$.

**VII.** $x$ = AC et $y$ = AB.




On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A.
On obtient : $\text{BC}^2 = x^2 + y^2$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en C.
On obtient :

$$\begin{aligned}\text{BD}^2 &= \text{BC}^2 + \text{CD}^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^2 \\ &= 2x^2 + y^2\end{aligned}$$

Donc $\text{BD} = \sqrt{2x^2 + y^2}$.

On ne peut pas aller plus loin : la racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées.

---

**VIII. Logique**

1°)

Si $x \in ]-1\ ;\ 2]$, alors $|x| \leqslant 2$.

Cette proposition conditionnelle est vraie.

La réciproque de cette proposition s'énonce ainsi :

Si $|x| \leqslant 2$, alors $x \in ]-1\ ;\ 2]$.

Cette réciproque est fausse (contre-exemple : $x = -1{,}5$).

2°) « Si $D$ et $D'$ sont sécantes, alors $D$ et $D'$ sont coplanaires. »

La contraposée de cette proposition s'énonce ainsi :

Si $D$ et $D'$ ne sont pas coplanaires, alors elles ne sont pas sécantes.

**IX.**

**Entrées :**

Saisir $x$ et $y$

**Traitement et sortie :**

**Si** $y > x^2$,

**alors** afficher « M appartient à $\boldsymbol{E}$ ».

**Sinon** afficher « M appartient à $\boldsymbol{F}$ ».

**FinSi**