TS spé

Multiples et diviseurs

Le 16 août 2023

décalage d'un jour d'une année sur l'autre

- $365 = 52 \times 7 + 1$

année non bissextile $\rightarrow$ 1 jour

- $366 = 52 \times 7 + 2$

année bissextile $\rightarrow$ 2 jours

Le 16 novembre 2022 (10 h 30 à 12 h)

Pour savoir si un nombre est divisible par
4 $\rightarrow$ divise 2 puis par 2

9 $\rightarrow$ 3 puis par 3

8 $\rightarrow$ ….

Même méthode pour a : divisible par a^n

Le 21 novembre 2022 (10 h 30 à 12 h)

Pour savoir si un nombre est divisible par
4 $\rightarrow$ divise 2 puis par 2

9 $\rightarrow$ 3 puis par 3

8 $\rightarrow$ ….

Même méthode pour a : divisible par a^n

Le 22-11-2022

divisibilité par 4

On divise par 2, puis encore par 2.

valable pour la divisibilité par a^n.

Pour savoir si un nombre est divisible par un autre nombre, on peut effectuer une division euclidienne.

Le 4 décembre 2022

Nombres premiers
Pourquoi dit-on qu'ils sont premiers ?

Le 8 décembre 2022

T exp

Soit a et b deux entiers relatifs.
a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow \mathcal{D}^+(a) \cap \mathcal{D}^+(b) = \{1\}$
a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \{1, -1\}$

Soit a un entier naturel
a est un nombre premier $\Leftrightarrow$ card $\mathcal{D}^+(a) = 2$

Le 6 décembre 2022

Nombres premiers en anglais « prime numbers »
D'où vient le nom ?
Ils permettent de reconstituer par produit tous les autres nombres comme nous le verrons plus tard.

Le 8 décembre 2022

Calculatrice Numworks
Tester si un nombre est premier sur calculatrice avec la décomposition en facteurs premiers (obtenue par les trois petits points).

Le samedi 21-9-2019

https://fr.numberempire.com/equationsolver.php
Propriétés des nombres

Nombre 2019

Propriétés du nombre 2019

Factorisation	3 * 673
Diviseurs	1, 3, 673, 2019
Nombre de diviseurs	4
Somme des diviseurs	2696
Nombre entier précédent	2018
Nombre entier suivant	2020
Est-il premier	NO
Nombre premier précédent	2017
Nombre premier suivant	2027
2019th premier	17569
Est-ce un nombre de Fibonacci?	NO
Est-ce un nombre de Bell ?	NO
Est-ce un nombre de Catalan ?	NO
Est-ce une factorielle ?	NO
Est-il un nombre régulier ?	NO
Est-ce un nombre parfait ?	NO
Nombre polygonal (s < 11)?	NO
Binaire	11111100011
Octal	3743
Duodécimal	1203
Hexadécimal	7e3
Carré	4076361
Racine carrée	44,933283877322
Logarithme népérien	7,6103576183128
Logarithme Décimal	3,3051363189436
Sinus	0,86446054122904
Cosinus	-0,50270067899099
Tangente	-1,7196327304832

Le 11-1-2018

divisibilité et relation entre ensembles et divisibilité

$a \mid b \Leftrightarrow \mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}(b)$

C'est utile dans le cours sur le PGCD et PPCM.

Le mercredi 15 novembre 2017

Technique d'élimination

$a = 3n + 5$

$b = 7n - 10$

Former une combinaison linéaire non nulle à coefficients entiers de *a* et *b* dont le résultat soit indépendant de *n*.

Le samedi 28 octobre 2017

$$a = bc + d$$

gestes associés

$$24 = 3 \times 2 + 18$$

TS spécialité

Multiples et diviseurs

Plan du chapitre :

I. Divisibilité

II. Ensemble des diviseurs d'un entier

III. Exercices d'application de la définition

IV. Parité d'un entier

V. Propriétés de la relation de divisibilité

VI. Exercices d'application des propriétés

VII. Une caractérisation de la divisibilité

VIII. Lemme $a = bc + d$

IX. Nombres premiers

X. Critères de divisibilité

XI. Entiers premiers entre eux

XII. Lemme d'Euclide

XIII. Fractions irréductibles

XIV. Aperçu sur les équations diophantiennes (exercice guidé)

Les démonstrations du chapitre sont à étudier et à savoir refaire.

Savoir refaire les exemples du cours avec la rédaction.

Dans tout le chapitre, le mot « entier » désignera un « entier relatif ».

Pour commencer le cours, je préconise le jeu de Juniper Green avec version à deux et version en solitaire (cf. document enregistré dans mon ordinateur). Introduire les nombres premiers avec le jeu de Juniper Green.
Le jeu (développé à l'origine par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green).

Le jeu a été créé par Richard Porteous, professeur à l'école de Juniper Green, auquel il doit son nom. Il s'est réellement fait connaître grâce à Ian Stewart, qui en décrit les règles dans la revue *Pour la Science*, dans le numéro de juillet 1997.

Ce jeu comporte quatre règles :
1. Le joueur 1 choisit un nombre entre 1 et N_{max}.
2. À tour de rôle, chaque joueur doit choisir un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire et inférieur à N_{max}.
3. Un nombre ne peut être joué qu'une seule fois.
4. Le premier nombre choisi doit être pair.

Le perdant est le joueur qui ne trouve plus de multiples ou de diviseurs communs au nombre choisi par l'adversaire.

Exemple de partie :

Jouons avec des nombres entre 1 et 20.
Je choisis comme nombre de départ 2.
Nombres valides : [1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]
Que jouez-vous ? 4
Nombres valides : [1, 8, 12, 16, 20].

Je joue 8.
Nombres valides : [1, 16].

Que jouez-vous ? 16
Nombres valides : [1].

Je joue 1.
Nombres valides : [3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20]
Que jouez-vous ? 11 Bravo !

I. Divisibilité

1°) Définition

a et b sont deux entiers relatifs.
On dit que ***a* divise *b*** (on note ***a* | *b***) lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b = k \times a$.

On dit que :
- **« *b* est divisible par *a* »** ;
- **« *a* est un diviseur de *b* »** ;
- **« *b* est un multiple de *a* »**.

• On utilise bien une barre verticale et non horizontale de quotient. Cette notation n'a rien à voir avec la notation d'un quotient.
• Lorsqu'un entier ne divise pas un autre entier, on peut utiliser le symbole $\nmid$ qui signifie « ne divise pas » (barre normale qui est barrée).

2°) Exemples

• $3 \mid -27$ car $-27 = -9 \times 3$.
On peut dire que 3 est un diviseur de – 27.
On peut dire aussi que – 27 est un multiple de 3.

• $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n+1 \mid n^2 - 1$ car $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ avec $n-1 \in \mathbb{Z}$.

Attention dans l'écriture $a \mid b$; il y a un ordre.
Par exemple : $3 \mid 27$ mais $27 \nmid 3$.
On évite d'écrire $27 : 3 = 9$.

On notera bien que l'on travaille le plus possible avec des égalités, spécialement quand on travaille avec des expressions littérales. On évite d'écrire des quotients.

3°) Remarques

• Tout entier relatif divise 0 (car $0 = a \times 0$).

• 0 ne divise aucun entier $b \neq 0$ (car $b \neq k \times 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).

• – 1 et 1 divisent tous les entiers ($b = b \times 1$ et $b = (-b) \times (-1)$).

• Les diviseurs entiers naturels d'un entier relatif non nul sont aussi appelés « diviseurs positifs » au sens de « diviseurs positifs ou nuls » ou « diviseurs strictement positifs » puisque 0 n'est pas un diviseur.

II. Ensemble des diviseurs d'un entier

1°) Propriété

• Énoncé :

Tout entier relatif non nul admet un nombre fini de diviseurs.

• Démonstration :

L'idée de la démonstration repose sur le résultat suivant :

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.
Si $a \mid b$, alors $|a| \leqslant |b|$.

$a \mid b$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $b = k \times a \quad (1)$.

$b \neq 0$ donc $k \neq 0$.

(1) donne alors $|b| = |k| \times |a|$ (la valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues).
k est un entier non nul donc $|k|$ est un entier naturel non nul.
Par suite, $|k| \geqslant 1$.
On a donc $|k| \times |a| \geqslant |a|$.
Par conséquent, $|b| \geqslant |a|$.

Conséquence :

Soit a un entier relatif non nul.
Les diviseurs de a appartiennent à l'intervalle $\left[-|a| ; |a|\right]$ et sont des entiers relatifs. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{D}(a)$ des diviseurs de a est inclus dans l'intervalle d'entiers $\llbracket -|a| ; |a| \rrbracket$ (ce que l'on peut écrire $\mathcal{D}(a) \subset \llbracket -|a| ; |a| \rrbracket$).
Les diviseurs de a sont donc en nombre fini (inférieur ou égal à $2|a|+1$ d'après le résultat sur le nombre d'éléments d'un intervalle d'entiers vu dans le chapitre précédent).
Comme $a \neq 0$, on peut dire que 0 n'est pas un diviseur de a. Le nombre de diviseurs est donc inférieur ou égal à $2|a|$.

On peut utiliser les notations vues dans le chapitre sur les ensembles pour écrire $\mathcal{D}(a) = \{k \in \mathbb{Z} \,/\, k \mid a\}$.

2°) Vocabulaire

$a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$

On dit que k est le **diviseur de *b* associé** à a.

Exemple :

$17 \mid -153$ car $-153 = 17 \times (-9)$

– 9 est le diviseur de – 153 associé à 17.
On dit aussi que 17 et – 9 sont deux diviseurs associés de – 153.
On dit aussi que 17 et – 9 sont $\boxed{\text{des}}$ diviseurs associés de – 153.

En gros, pour résumer, on peut dire que des diviseurs associés sont des diviseurs qui « marchent » ensemble.

Cas particulier : Pour tout entier relatif *n*, 1 et *n* sont toujours deux diviseurs associés de *n*.

> Si *d* est un diviseur de *n*, son diviseur associé est l'entier d' tel que $dd' = n$.
> Autrement dit, son diviseur associé est $d' = \dfrac{n}{d}$.

Si *n* est un entier naturel non nul (c'est-à-dire strictement positif), il est évident que deux diviseurs associés de *n* sont de même signe d'après la règle du signe d'un produit (puisque $n > 0$). En particulier, le diviseur associé à un diviseur positif est lui-même un entier positif.

3°) Notations

> Pour tout entier relatif *a*, on note :
> $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de *a* dans $\mathbb{Z}$;
> $\mathcal{D}^+(a)$ l'ensemble des diviseurs entiers naturels de *a* ;
> $\mathcal{D}^-(a)$ l'ensemble des diviseurs entiers négatifs de *a*.

Exemples :

$\mathcal{D}(15) = \{15 ; 5 ; 3 ; 1 ; -1 ; -3 ; -5 ; -15\}$

$\mathcal{D}^+(15) = \{1 ; 3 ; 5 ; 15\}$

Pour tout entier *a*, on a $\mathcal{D}^+(a) \subset \mathcal{D}(a)$.

Conséquence : Pour tout entier *a* non nul, $\mathcal{D}^+(a)$ est fini (car on a démontré que $\mathcal{D}(a)$ est fini).

4°) Recherche de l'ensemble des diviseurs d'un entier

Pour déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier, on cherche toutes les manières d'écrire cet entier comme produit de deux entiers.

La recherche de tous les diviseurs d'un entier « à la main » peut être fastidieuse.
On étudiera dans un chapitre ultérieur un moyen à l'aide de la décomposition d'un entier en facteurs premiers.
Sinon, on pourra utiliser un **programme** (voir chapitre sur la division euclidienne) ou un **logiciel de calcul formel** (par exemple, le logiciel *XCas*).

Pour le logiciel XCas : cmds → entier → idivis
Le logiciel XCas donne seulement les diviseurs positifs ; il ne les donne pas dans l'ordre croissant.
On peut par exemple chercher l'ensemble des diviseurs de plusieurs entiers par exemple 2014, 2015, 360…

Pour 360, les diviseurs sont mis dans un ordre inexplicable.

5°) Recherche des diviseurs d'un nombre entier (algorithme)

● Rappel :

On sait que si le produit de deux réels $\boxed{\text{positifs}}$ est égal à un réel *m*, alors l'un des deux réels est supérieur ou égal à $\sqrt{m}$ et l'autre est inférieur ou égal à $\sqrt{m}$.

Il s'agit d'une propriété des moyennes géométriques analogue à celle des moyennes arithmétiques.
On la démontre par l'absurde.
Si les deux réels positifs sont strictement inférieurs à $\sqrt{m}$, alors leur produit est strictement inférieur à *m*.
Si les deux réels sont strictement supérieurs à $\sqrt{m}$, alors leur produit est strictement supérieur à *m*.

● Règle pratique :

> Pour déterminer la liste des diviseurs positifs d'un entier naturel N, on teste (ou il suffit de tester) la divisibilité de N par tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à $\sqrt{\text{N}}$.

● Exemple :

On veut écrire la liste des diviseurs positifs de 48.

On a $\sqrt{48} = 6{,}9282032...$ donc on teste les diviseurs positifs jusqu'à 6.

$48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$

Les diviseurs positifs de 48 sont donc 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 48.

On peut écrire l'égalité d'ensembles $\mathcal{D}^+(48) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 18 ; 24 ; 48\}$.

III. Exemples d'application de la définition

1°) Exemple 1

Démontrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs quelconques est divisible par 3.

Solution :

On considère trois entiers relatifs consécutifs.

1ère méthode :

On note *n* le plus petit des trois entiers.
Les trois entiers consécutifs peuvent s'écrire *n*, $n+1$, $n+2$.

On a : $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$.
Comme $n\in\mathbb{Z}$, $n+1\in\mathbb{Z}$.

La somme est donc bien divisible par 3.

2^e méthode :

On note n l'entier du milieu.
L'entier qui le précède est $n-1$; l'entier qui le suit est $n+1$.
On a : $(n-1)+n+(n+1)=3n$.

La somme est donc bien divisible par 3.

> Il est possible pour s'entraîner de faire de même pour 5 entiers relatifs consécutifs.
> Démontrer que la somme de cinq entiers consécutifs quelconques est divisible par 5.
>
> Pour rédiger :
>
> On commence par dire :
>
> « Considérons cinq entiers consécutifs. »
>
> Ensuite, au choix, on écrit :
>
> → Notons n l'entier du « milieu ».
>
> → Notons n le plus petit des cinq entiers.

2°) Exemple 2

Quel est l'ensemble des entiers n tels que 7 divise $n+4$?

Solution :

$7\mid n+4$ signifie qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n+4=7k$ c'est-à-dire $n=7k-4$.

L'ensemble cherché est l'ensemble des entiers de la forme $7k-4$ $(k\in\mathbb{Z})$.

> Il s'agit d'un ensemble infini.

3°) Exemple 3

Déterminer les entiers n tels que $2n-1$ divise 10.

Solution :

Les diviseurs de 10 sont : 1, 2, 5, 10, – 1, – 2, – 5, – 10.
On effectue un raisonnement par équivalences (en rédigeant par chaîne d'équivalences).

$$2n-1\mid 10 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2n-1=1 \\ \text{ou} \\ 2n-1=2 \\ \text{ou} \\ 2n-1=5 \\ \text{ou} \\ 2n-1=10 \\ \text{ou} \\ 2n-1=-1 \\ \text{ou} \\ 2n-1=-2 \\ \text{ou} \\ 2n-1=-5 \\ \text{ou} \\ 2n-1=-10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2n=2 \\ \text{ou} \\ 2n=3 \\ \text{ou} \\ 2n=6 \\ \text{ou} \\ 2n=11 \\ \text{ou} \\ 2n=0 \\ \text{ou} \\ 2n=-1 \\ \text{ou} \\ 2n=-4 \\ \text{ou} \\ 2n=-9 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=1 \\ \text{ou} \\ n=3 \\ \text{ou} \\ n=0 \\ \text{ou} \\ n=-2 \end{array}\right.$$

Les équations $2n=3$, $2n=11$, $2n=-1$, $2n=-9$ n'ont pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

Les solutions cherchées sont 1, 3, 0 et – 2.

On peut faire une vérification (ici facultative) pour chacune de ces valeurs.
Par exemple, pour $n=1$, $2n-1=1$ et 1 divise bien 10.
De même, pour $n=3$, $2n-1=5$ et 5 divise bien 10.
Etc.

4°) Exemple 4

On dit que deux entiers naturels sont « amicaux » si la somme des diviseurs positifs autres que lui-même de chacun de ces nombres est égale à l'autre nombre.
Démontrer que 220 et 284 sont amicaux.

Solution :

On peut obtenir facilement la liste des diviseurs positifs de 220 et de 284 grâce à un logiciel de calcul formel ou grâce à un programme sur calculatrice que nous ferons plus tard.

$$D^{+}(220)=\{1\,;2\,;4\,;5\,;10\,;11\,;20\,;22\,;44\,;55\,;110\,;220\}$$

$$D^{+}(284)=\{1\,;2\,;4\,;71\,;142\,;284\}$$

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

$1+2+4+71+142=220$

On en déduit que 220 et 284 sont amicaux.

IV. Parité d'un entier

1°) Définition

• On dit qu'un entier est **pair** s'il est divisible par 2 (ou, de manière équivalente si c'est un multiple de 2).
• On dit qu'un entier est **impair** s'il n'est pas pair, c'est-à-dire pas divisible par 2(ou, de manière équivalente si ce n'est pas un multiple de 2).

2°) Remarque

0 est un entier pair car il est divisible par 2 (égalité : $0=0\times 2$; en fait, 0 est divisible par tous les entiers).

Avec la propriété qui suit, on peut aussi dire que comme $0=2\times 0$, 0 est de la forme 2p avec p entier relatif.

Le 4 mars 2023

Le mot impair se dit *odd* en anglais, qui signifie bizarre. Dans les années 1970, il y avait une série américaine qui s'appelait « The Odd Couples », « Couple bizarre ».
Les nombres impairs ont toujours été mal considérés. On dit d'ailleurs « commettre un impair ».

3°) Propriété

n est un entier relatif.

• n est pair $\Leftrightarrow$ n est de la forme 2p où p est un entier.

• n est impair $\Leftrightarrow$ n est de la forme $2p+1$ où p est un entier.

Démonstration :

• La première équivalence est évidente par la définition d'un nombre pair.

• La deuxième équivalence se démontre facilement en deux temps (sens direct et sens réciproque).

Sens direct :
Soit n un entier impair.
n est compris entre deux entiers pairs consécutifs 2p et $2p+2$: $2p<n<2p+2$.
Comme $2p+1$ est le seul entier compris strictement entre 2p et $2p+2$, on peut affirmer que $n=2p+1$.

Une autre démonstration est possible en utilisant la division euclidienne (cf. chapitre suivant).

Sens réciproque :
Soit n un entier relatif de la forme $2p+1$ où p est un entier relatif. On voit immédiatement que n n'est pas divisible par 2. Donc n est impair.

4°) Application : démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Il s'agit d'une démonstration par l'absurde.
Nous la ferons plus tard.

5°) Partition de $\mathbb{N}$

Propriété :

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.

La démonstration évidente.

Les propriétés seront vues dans le chapitre suivant.

V. Propriétés de la relation de divisibilité

1°) Énoncés

a, b, c sont trois entiers relatifs.

(1) **Transitivité** Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

(2) **Réflexivité** $a \mid a$

(3) Si $a \mid b$, alors, pour tout entier λ, $a \mid \lambda b$.

(4) Si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $a=b$ ou $a=-b$.

(5) **Propriété fondamentale**

Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors a divise toute **combinaison linéaire** de b et c à coefficients entiers.
Autrement dit, $a \mid \lambda b+\mu c$ où λ et μ sont des entiers quelconques.

2°) Démonstrations

On travaille avec des égalités.

(1) On suppose que $a \mid b$ et $b \mid c$.

$a \mid b$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
$b \mid c$ donc $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k' \times b$.

Donc $c = (k \times k') \times a$.

Comme $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$, $k \times k' \in \mathbb{Z}$.
D'où $a \mid c$.

On a déjà rencontrée la propriété de transitivité sans le dire :
- pour la relation d'égalité dans $\mathbb{R}$: Si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$.
- pour la relation d'ordre < dans $\mathbb{R}$: Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

(2)

$a = a \times 1$ donc $a \mid a$

(3)

$a \mid b$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
On a donc $\lambda b = \lambda k \times a$ avec $\lambda k \in \mathbb{Z}$.

(4)

$a \mid b$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
$b \mid a$ donc $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k' \times b$.

On obtient : $b = k' k \times b$ d'où $b(1 - kk') = 0$ soit $b = 0$ ou $kk' = 1$.

Si $b = 0$, alors comme $a = k' \times b$, $a = 0$ donc $a = b$.

Si $kk' = 1$, alors ($k = 1$ et $k' = 1$) ou ($k = -1$ et $k' = -1$).

Donc $a = b$ ou $a = -b$.

Autre méthode :

1$^{\text{er}}$ cas : $a = 0$
On a alors $b = 0$. La propriété est vérifiée.

2$^{\text{e}}$ cas : $b = 0$
On a alors $a = 0$. La propriété est vérifiée.

3$^{\text{e}}$ cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$
On a alors : $|a| \leqslant |b|$ et $|b| \leqslant |a|$.

Par suite, $|a| = |b|$. Donc $a = b$ ou $a = -b$.

(5)

$a \mid b$ et $a \mid c$ donc il existe des entiers relatifs k et k' tels que $b = k \times a$ et $c = k' \times a$.

On considère deux entiers relatifs quelconques λ et μ.

On a : $\lambda b + \mu c = \lambda k \times a + \mu k' \times a = (\lambda k + \mu k') \times a$ avec $\lambda k + \mu k' \in \mathbb{Z}$.

Donc $a \mid \lambda b + \mu c$.

3°) Commentaire sur la propriété (2)

Tout entier naturel a est toujours divisible par 1 et par lui-même (en effet : $a = a \times 1$).
Il en résulte que tout entier naturel a distinct de 1 admet toujours au moins deux diviseurs positifs, à savoir 1 et lui-même.

4°) Cas particulier de la propriété (5)

Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid b + c$ et $a \mid b - c$ (combinaisons linéaires particulières pour $(\lambda ; \mu) = (1 ; 1)$ et $(\lambda ; \mu) = (1 ; -1)$).

On retiendra la propriété suivante qui est un corollaire de la propriété (5).

Si un entier divise deux entiers, alors il divise leur somme et leur différence.

Conséquence : Pour reconnaître des multiples d'un nombre, il est possible de soustraire successivement des multiples simples de ce nombre.
Par exemple, pour savoir si 21743 est un multiple de 7, on peut soustraire successivement 21 000 ($= 3000 \times 7$), 700 et 42 ; il reste 1 qui n'est pas multiple de 7.

5°) Définition [combinaison linéaire de deux entiers relatifs à coefficients entiers]

a et b sont deux entiers relatifs.

On appelle **combinaison linéaire** de a et b à coefficients entiers toute expression de la forme $\lambda a + \mu b$ où λ et μ sont des entiers.
λ et μ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

La propriété (5) peut aussi être formulée sous la forme suivante :

Si a est un diviseur commun à b et c, alors a divise tout combinaison linéaire de b et c à coefficients entiers.

Le 4 décembre 2022

Ensemble des multiples d'un entier relatif

$\mathcal{M}(a)$

Écriture *ka*, *k* décrivant $\mathbb{Z}$

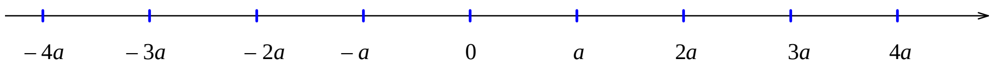
Cas particuliers :

$a=0 \quad \mathcal{M}(0)=0$

$a=1 \quad \mathcal{M}(1)=\mathbb{Z}$

Si a est non nul, $\mathcal{M}(a)$ est un ensemble infini.

Représentation sur la droite réelle lorsque $a \neq 0$:



Il s'agit d'une image mentale fondamentale.

Pour tout entier relatif a, on a $\mathcal{M}(-a)=\mathcal{M}(a)$ (notation du cours : $\mathcal{M}(a)$ désigne l'ensemble des multiples de a ; $\mathcal{M}(-a)$ désigne l'ensemble des multiples de – a).

La somme et la différence de deux éléments de $\mathcal{M}(a)$ est un élément de $\mathcal{M}(a)$.

Notation $a\mathbb{Z}$

Le produit d'un élément de $\mathcal{M}(a)$ par un entier quelconque est un élément de $\mathcal{M}(a)$).

$\mathcal{M}(2)$ = ensemble des nombres pairs

La somme et la différence de deux entiers pairs est un entier pair.

VI. Exercices d'application des propriétés

1°) Exercice 1 (raisonnement par implication)

n et a sont des entiers relatifs.

Démontrer que si $a \mid 2n+5$ et $a \mid 3n-1$, alors $a \mid 17$.

Solution :

$a \mid 2n+5$ et $a \mid 3n-1$ donc a divise toute combinaison linéaire de $2n+5$ et $3n-1$ à coefficients entiers.

En particulier, $a \mid 3(2n+5)-2(3n-1)$ c'est-à-dire $a \mid 17$.

Remarque : Les valeurs possibles de a sont – 17, – 1, 1 et 17.

En effet, les diviseurs de 17 sont – 17, – 1, 1 et 17.

On notera que 17 est un nombre premier car il n'admet que deux diviseurs positifs (cf. paragraphe **X**).

2°) Exercice 2 (exemple de raisonnement par équivalences)

Déterminer les entiers n tels que $n \mid n+8$.

Solution :

On raisonne en deux parties.

1ère partie :

Soit n un entier relatif tel que $n \mid n+8$.

$n \mid n$ de manière évidente donc n divise toute combinaison linéaire de $n+8$ et n à coefficients entiers.
En particulier, $n \mid (n+8)-n$ (la somme et la différence de deux entiers sont des combinaisons linéaires particulières) c'est-à-dire $n \mid 8$.
Ainsi, les valeurs possible de n sont – 8, – 4, – 2, – 1, 1, 2, 4, 8.

2e partie :

On vérifie que pour chacune de ces valeurs de n on a bien $n \mid n+8$.

Conclusion : Les entiers cherchés sont – 8, – 4, – 2, – 1, 1, 2, 4, 8.

Dans le paragraphe **VIII**, nous verrons une façon de traiter l'exercice directement par équivalences.

3°) Exercice 3 (exemple de raisonnement exhaustif)

a) Déterminer $\mathcal{D}(56)$.
b) Déterminer les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $(2x+1)y=56$ (E).

Solution :

a) $\mathcal{D}(56)=\{-2\,;2\,;-1\,;1\,;-56\,;56\,;-28\,;28\,;-4\,;4\,;-14\,;14\,;-8\,;8\,;-7\,;7\}$

b)

On raisonne par paires de diviseurs associés de 56.

(E) $\Leftrightarrow$ $2x+1$ et y sont $\boxed{\text{des}}$ diviseurs associés de 56

(E) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}2x+1=-56\\y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=-8\\y=-7\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=-7\\y=-8\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=-1\\y=-56\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=1\\y=56\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=7\\y=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=8\\y=7\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x+1=56\\y=1\end{cases}$

(E) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=-4\\y=-8\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-1\\y=-56\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=0\\y=56\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$ (car les équations $2x+1=-56$, $2x+1=-8$, $2x+1=8$, $2x+1=56$ n'ont pas de solutions dans $\mathbb{Z}$)

Conclusion : Les couples solutions de (E) sont $(-4\,;-8)$, $(-1\,;-56)$, $(0\,;56)$, $(3\,;8)$.

On aurait pu observer directement que $2x+1$ est un diviseur impair de 56 (il faut toujours penser à la parité ; cela permet de gagner du temps).

4°) Exercice 4 (exemple d'équation diophantienne)

Déterminer les couples $(x,\,y)$ d'entiers relatifs tels que $x^2-y^2=9$ (E).

Solution :

Notons que si $(x,\,y)$ est solution de (E), il en va de même des couples $(-x,\,y)$, $(x,\,-y)$, $(-x,\,-y)$.
On a donc 4 couples associés dont l'un est forcément un couple d'entiers naturels.
On va donc résoudre (E) avec $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$.
On a alors $x-y<x+y$.

(E) $\Leftrightarrow (x-y)(x+y)=9$

Cette dernière égalité exprime que $x-y$ et $x+y$ sont donc des diviseurs associés de 9 avec $x-y<x+y$.

Or $\mathcal{D}^+(9)=\{1\,;3\,;9\}$
D'où $\begin{cases}x-y=1\\x+y=9\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=3\\x+y=3\end{cases}$.

Donc $\begin{cases}2x=10\\x-y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x=6\\x+y=3\end{cases}$.

D'où $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$.

On trouve 6 couples : $(5\,;4)$, $(-5\,;4)$, $(5\,;-4)$, $(-5\,;-4)$, $(3\,;0)$, $(-3\,;0)$.

On vérifie que tous ces couples sont solutions (à faire au moins pour l'un des couples).

Conclusion : Les couples solutions de (E) sont $(5\,;4)$, $(-5\,;4)$, $(5\,;-4)$, $(-5\,;-4)$, $(3\,;0)$, $(-3\,;0)$.

VII. Une caractérisation de la divisibilité

1°) Propriété

a et *b* sont deux entiers relatifs tels que $b\neq 0$.

$b\mid a \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}\in\mathbb{Z}$

2°) Commentaires

• Cette caractérisation sera utilisée plus tard en programmation.

• Nous avons choisi de ne pas utiliser cette caractérisation dans les démonstrations du chapitre mais de toujours privilégier des égalités ($b=k\times a$ avec $k\in\mathbb{Z}$). Dans ce chapitre, on évite en effet d'écrire des quotients. De plus, la caractérisation comporte l'hypothèse supplémentaire $b\neq 0$.

VIII. Lemme $a=bc+d$

En mathématiques, le mot « lemme » signifie « proposition ». Il s'agit souvent d'une petite propriété de démonstration assez courte, qui permet de démontrer d'autres propriété plus importante.
Il s'agit parfois d'un résultat intermédiaire à l'intérieur d'une longue démonstration.
On en retrouve la trace du mot « lemme » dans le mot « dilemme », qui s'emploie lorsque l'on a le choix entre deux propositions (racine « di » qui signifie deux).
Un lemme désigne en général une petite proposition.

1°) Énoncé

Soit *a*, *b*, *c*, *d* quatre entiers relatifs tels que $a=bc+d$.

b divise *a* si et seulement si *b* divise *d*.

Pour mémoriser la propriété, il est important de faire les gestes correspondants.

On remarque que le *c* n'intervient pas dans le lemme.

2°) Démonstration (à savoir refaire)

On effectue la démonstration en deux étapes.

1$^{\text{ère}}$ étape : Supposer que b divise a et démontrer qu'alors b divise d.

2$^{\text{e}}$ étape : Supposer que b divise d et démontrer qu'alors b divise a.

1$^{\text{ère}}$ étape : Supposons que b divise a.
On a $b \mid b$ de manière évidente.
Donc b divise toute combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs.
D'où $b \mid a - bc$.
Par suite, $b \mid d$.

2$^{\text{e}}$ étape : Supposons que b divise d.
On a $b \mid b$ de manière évidente.
Donc b divise toute combinaison linéaire de d et de b à coefficients entiers relatifs.
D'où $b \mid bc + d$.
Par suite, $b \mid a$.

3°) Application

- utilisation en exercices

- utilisation pour démontrer les critères de divisibilité (voir fiche à part sur les critères de divisibilité)

4°) Exemple d'utilisation (reprise de l'exercice 2 du paragraphe VI)

Déterminer les entiers n tels que $n \mid n+8$.

On applique le lemme avec $a = n+8$, $b = n$, $c = 1$, $d = 8$.

$n \mid n+8 \Leftrightarrow n \mid 8$

Les diviseurs de 8 sont – 8, – 4, – 2, – 1, 1, 2, 4, 8.

Donc les entiers cherchés sont – 8, – 4, – 2, – 1, 1, 2, 4, 8.

On notera que l'utilisation du lemme permet de faire un raisonnement par équivalence.

IX. Nombres premiers

1°) Introduction

	Diviseurs positifs
0	tous les entiers naturels
1	1
2	1 ; 2
3	1 ; 3
4	1 ; 2 ; 4
5	1 ; 5
6	1 ; 2 ; 3 ; 6
7	1 ; 7

Tout entier naturel admet au moins 1 et lui-même pour diviseurs positifs.

Certains entiers naturels n'ont que ces deux-là pour diviseurs ; d'autres en ont en plus.

2°) Définition [nombre premier]

On dit qu'un entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

On dit qu'un entier naturel a est **premier** si le nombre de diviseurs positifs de a est égal à 2.
Ces deux diviseurs positifs sont 1 et a.

Le 6 décembre 2022

Nombres premiers en anglais « prime numbers »

D'où vient le nom ?
Ils permettent de reconstituer par produit tous les autres nombres comme nous le verrons plus tard.

Le 8 décembre 2022
Calculatrice Numworks
Tester si un nombre est premier sur calculatrice avec la décomposition en facteurs premiers (obtenue par les trois petits points).

3°) Exemples et contre-exemples

3 est premier.

6 n'est pas premier car il est divisible par 3.

0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs.

1 n'est pas premier car il admet un seul diviseur positif : lui-même.
On retiendra que 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

4°) Liste des premiers nombres premiers

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 etc.

On retiendra bien que la liste des nombres premiers commence à 2 et non à 1.
Nous démontrerons plus tard qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Le plus grand nombre premier connu actuellement est le nombre $2^{82\,589\,933}-1$ trouvé le 7 décembre 2018 par Patrick Loche dans le cadre du programme GIMPS.

5°) Propriétés immédiates

- Un nombre premier est toujours strictement supérieur à 1 (c'est-à-dire supérieur ou égal à 2).
- Un nombre premier admet exactement deux diviseurs strictement positifs.
- Le seul nombre premier pair est 2.

6°) Problèmes liés aux nombres premiers

De nombreux problèmes se posent encore concernant les nombres premiers et n'ont jamais été résolus.

Exemple :

La conjecture de Goldbach qui date du XVII^{e} siècle stipule que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est égal à la somme de deux nombres premiers (exemples : $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $16=3+13$).
Cette conjecture dont on pense qu'elle est vraie n'a toujours pas été démontrée à ce jour.

7°) Suite du cours

Un chapitre spécial sera consacré plus tard aux nombres premiers. Dans ce chapitre, il ne s'agit que d'une initiation.

X. Critères de divisibilité

1°) Propriétés

On se réfère aux chiffres qui composent l'écriture en base dix d'un entier naturel.
Pour un entier négatif, on considère sa valeur absolue.

- Un entier est divisible par 2 si et seulement si il se termine par un chiffre pair (0, 2, 4, 6 ou 8).

- Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (celui des dizaines et celui des unités) est divisible par 4.

- Un entier est divisible par 5 si et seulement si il se termine par 0 ou 5.

- Un entier est divisible par 6 si et seulement si il est divisible à la fois par 2 et par 3.

- Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres qui composent son écriture est divisible par 9.

- Un entier est divisible par 10 si et seulement si il se termine par un 0.

- Un entier est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25.

On notera que pour les critères de divisibilité par 3 et par 9, on peut réadditionner les chiffres.

2°) Démonstrations

Les démonstrations seront faites dans le chapitre sur les congruences.

3°) Exemples d'utilisation

47 103 est divisible par 3.

327 424 est divisible par 4.

4°) Autres critères

Nous allons donner des critères de divisibilité par 2^n et 5^n où n est un entier naturel, qui permettent de généraliser les critères de divisibilité par 2, 4, 8, 5, 25.

Ces critères se démontrent très facilement en utilisant la décomposition en base dix d'un entier naturel N.
En notant p le nombre de chiffres de l'écriture en base dix, on peut écrire $\mathrm{N}=\overline{a_{p-1}a_{p-2}...a_1a_0}^{(10)}$.
La décomposition en base dix de N s'écrit $\mathrm{N}=a_{p-1}\times10^{p-1}+a_{p-2}\times10^{p-2}+...+a_1\times10+a_0$ ou encore
$$\mathrm{N}=\sum_{k=0}^{k=p-1}\left(a_k\times10^k\right).$$

Lorsque $p-1 \geqslant n$, on peut écrire $\mathrm{N}=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(a_k \times 10^k\right)+\sum_{k=n}^{k=p-1}\left(a_k \times 10^k\right)$.

Cette écriture donne $\mathrm{N}=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(a_k \times 10^k\right)+10^n\sum_{k=n}^{k=p-1}\left(a_k \times 10^{k-n}\right)$.

On pose $\mathrm{N}'=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(a_k \times 10^k\right)$ et $\mathrm{N}''=\sum_{k=n}^{k=p-1}\left(a_k \times 10^{k-n}\right)$, de sorte que $\mathrm{N}=\mathrm{N}'+10^n \times \mathrm{N}''$.

N' est le nombre obtenu en ne gardant que les *n* derniers chiffres de l'écriture en base dix de N (d'une certaine manière on peut dire que l'on « tronque » l'entier N).

Comme 2^n et 5^n divise 10^n, $2^n \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow 2^n \mid \mathrm{N}'$ et $5^n \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow 5^n \mid \mathrm{N}'$.

● Un entier naturel est divisible par 2^n si et seulement si ses *n* derniers chiffres forment un nombre divisible par 2^n.

Exemple : Un entier naturel est divisible par $8=2^3$ si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8. Par exemple, tout entier naturel qui « se termine » par 264 est divisible par 8, comme 3264, 5264, 11264, 123264.

● Un entier naturel est divisible par 5^n si et seulement si ses *n* derniers chiffres forment un nombre divisible par 5^n.

Exemple : Un entier naturel est divisible par $25=5^2$ si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25, c'est-à-dire si son écriture en base dix « se termine » par 00, 25, 50 ou 75.

Le mardi 3 janvier 2023

T exp reconnaître si un nombre est
● divisible par 25
● divisible par 125

XI. Entiers premiers entre eux

1°) Définition [entiers premiers entre eux]

On dit que deux entiers relatifs *a* et *b* sont **premiers entre eux** pour exprimer que leurs seuls diviseurs communs sont 1 et – 1.

Attention, la notion de nombres « premiers entre eux » n'a rien à voir avec la notion de « nombre premier ».

2°) Exemple et contre-exemple

18 et 49 sont premiers entre eux.

25 et 60 ne sont pas premiers entre eux.

3°) Propriété [condition suffisante pour que deux entiers soient premiers entre eux]

Énoncé :

Soient *a* et *b* deux entiers relatifs.
S'il existe une combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers relatifs égale à 1 ou – 1, alors *a* et *b* sont premiers entre eux.

Démonstration (à savoir refaire) :

● 1^er cas : combinaison linéaire égale à 1

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $au+bv=1$.
Soit *d* un diviseur commun à *a* et *b*.
On sait que *d* divise toute combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers. Donc *d* | 1 d'où $d=1$ ou $d=-1$.

● 2^e cas : combinaison linéaire égale à – 1

On raisonne de la même manière que dans le premier cas.

Remarques :

● On ne peut pas remplacer 1 ou – 1 par n'importe quel entier relatif.

● Nous étudierons plus tard la réciproque dans le chapitre « PGCD-PPCM ».

● Cette propriété permet de démontrer que des entiers sont premiers entre eux (cf. paragraphe suivant).

4°) Lemme

Énoncé :

Deux entiers relatifs consécutifs sont premiers entre eux.

Démonstration (à savoir refaire) :

On considère deux entiers relatifs consécutifs.
On note *n* le plus petit de ces deux entiers.
L'entier suivant est donc $n+1$.

Pour appliquer la propriété du 3°), on cherche une combinaison linéaire de *n* et $n+1$ à coefficients entiers égale à 1.

On observe immédiatement que la différence des deux entiers naturels est égale à 1.

On peut donc écrire $(-1)\times n+1\times(n+1)=1$.

Comme – 1 et 1 sont des entiers relatifs, d'après la propriété du 3°), on peut affirmer que *n* et $n+1$ sont premiers entre eux.

XII. Lemme d'Euclide

1°) Énoncé du lemme d'Euclide

Soit *a*, *b*, *c*, *d* des entiers relatifs tels que $a = bc + d$.
L'ensemble des diviseurs communs à *a* et *b* est égal à l'ensemble des diviseurs communs à *b* et *d*.

La propriété peut aussi s'exprimer sous la forme de l'égalité d'ensembles : $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(d)$.

Pour mémoriser la propriété, il est important de faire les gestes correspondants.

2°) Démonstration

On va démontrer que l'ensemble de diviseurs communs à *a* et *b* est égal à l'ensemble des diviseurs communs à *b* et *d*.

• 1ère partie :

Soit *k* un diviseur commun à *a* et *b*.

$k \mid a$ et $k \mid b$ donc *k* divise toute combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers.
En particulier, $k \mid a - bc$ donc $k \mid d$.
Donc *k* est un diviseur commun à *b* et *d*.

• 2e partie :

Soit k' un diviseur commun à *b* et *d*.

$k' \mid b$ et $k' \mid d$ donc k' divise toute combinaison linéaire de *b* et *d* à coefficients entiers.
En particulier, $k' \mid bc + d$ donc $k' \mid a$.
Donc k' est un diviseur commun à *a* et *b*.

Il en résulte que l'ensemble des diviseurs communs à *a* et *b* est égal à l'ensemble des diviseurs communs à *b* et *d*.

4°) Application à des chaînes d'égalités

On suppose que l'on a une suite d'égalités ne faisant intervenir que des entiers relatifs :

$$a = bc_0 + d_0$$

$$b = d_0c_1 + d_1$$

$$d_0 = d_1c_2 + d_2$$

$$\dots$$

$$d_{n-2} = d_{n-1}c_n + d_n$$

Propriété 1 :

On peut écrire : $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(d_0) = \mathcal{D}(d_0) \cap \mathcal{D}(d_1) = \dots = \mathcal{D}(d_{n-1}) \cap \mathcal{D}(d_n)$.

Nous utiliserons plus tard dans le chapitre sur PGCD et PPCM.

$$a = bc_0 + d_0 \qquad (0)$$

$$b = d_0c_1 + d_1 \qquad (1)$$

$$d_0 = d_1c_2 + d_2 \qquad (2)$$

$$\dots$$

$$d_{n-2} = d_{n-1}c_n + d_n \qquad (n)$$

(0) permet d'écrire $d_0 = a - bc_0$ donc $d_0 = au_0 + bv_0$ avec $u_0 = 1$ et $v_0 = -c_0$ qui sont des entiers.

(1) permet d'écrire $r_1 = b - d_0c_1 = b - (au_0 + bv_0)c_1 = -ac_1u_0 + b(1 - v_0c_1)$ donc $r_1 = au_1 + bv_1$ avec $u_1 = -u_0c_1$ et $v_1 = 1 - v_0c_1$ qui sont des entiers.

Pas à pas, on exprime les d_i comme combinaisons linéaires de *a* et *b* à coefficients entiers.

Propriété 2 :

d_0, d_1, …, d_n peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs de *a* et *b*.

Calcul algorithmique des coefficients ; présentation pratique :

		a	b		
a	L_1	1	0		
b	L_2	0	1		
d_0	L_3	1	$-c_0$	$L_3 \leftarrow L_1 - c_0 \times L_2$	$a = bc_0 + d_0$
d_1	L_4	$-c_1$	$1 + c_0c_1$	$L_4 \leftarrow L_2 - c_1 \times L_3$	$b = d_0c_1 + d_1$
$d_2$1	L_5	…	…	$L_5 \leftarrow L_3 - c_2 \times L_4$	$d_0 = d_1c_2 + d_2$
		↑	↑		
		u	v		

Nous verrons dans le chapitre PGCD-PPCM l'intérêt de la propriété 2 et de la présentation pratique.

XIII. Fractions irréductibles

1°) Définition [fraction irréductible]

On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

2°) Propriété (admise sans démonstration pour l'instant)

La forme irréductible d'une fraction est unique.

XIV. Aperçu sur les équations diophantiennes (exercice guidé)

Le 16-11-2020

Terminale experts

① Démontrer que si 3 divise $2a$, alors 3 divise a.

On peut écrire $a = 3a - 2a$.
On suppose que $3 \mid 2a \quad (1)$.

De manière évidente, $3 \mid 3a \quad (2)$.

Grâce aux relations (1) et (2), on peut ainsi dire que 3 divise $3a - 2a$ soit 3 divise a.

On a démontré que $3 \mid 2a \Rightarrow 3 \mid a$.

La réciproque est vraie de manière évidente.

Il s'agit d'un cas particulier d'un théorème que nous verrons plus tard : le théorème de Gauss.
« Si a divise bc et a et b premiers entre eux, alors a divise c. »

② Application : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3x - 2y = 5 \quad (\text{E})$.

Le couple $(1\,;-1)$ est une solution particulière de (E) car on a $3\times 1 - 2\times(-1) = 5$.
Le couple $(3\,;2)$ est aussi une solution particulière.
On a :

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\Leftrightarrow 3x - 2y = 3\times 1 - 2\times(-1)\\ &\Leftrightarrow 3(x-1) = 2(y+1) \quad (\text{E}')\end{aligned}$$

$(\text{E}') \Rightarrow 3$ divise $2(y+1)$

D'après le résultat établi au ①, 3 divise $y+1$.

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $y+1 = 3k$ ce qui donne $y = 3k - 1$.
On utilise alors (E') en remplaçant $y+1$ par $3k$.

On obtient $\cancel{3}\times(x-1) = 2\times\cancel{3}k$ ce qui donne $x = 2k+1$.
Au final, on obtient $(x,\, y) = (2k+1,\, 3k-1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On vérifie que $3(2k+1) - 2(3k-1) = 5$.

Conclusion :
Les solutions de (E) sont les couples de la forme $(2k+1,\, 3k-1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On vérifie avec le site dcode.
On verra plus tard le cas général de la résolution dans $\mathbb{Z}^2$ des équations de la forme $ax + by = c$ avec a, b, c entiers relatifs.