Le symbole d'équivalence

1. Généralités

Le symbole d'équivalence remplace le « si et seulement si ».

Le symbole $\Leftrightarrow$ s'emploie entre deux propositions.

A $\Leftrightarrow$ B où A et B sont des propositions* mathématiques.

A $\Leftrightarrow$ B est une nouvelle proposition mathématique créée à partir des propositions A et B.

2. Exemples

• Exemple d'utilisation correcte :

On a : $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$.

• Exemple d'utilisation incorrecte :

On pose $\mathrm{A} = (x+1)^2$.

Il serait tout à fait incorrect d'écrire : A $\Leftrightarrow$ x^2+2x+1 **.

A n'est pas une proposition mathématique.
Le symbole $\Leftrightarrow$ a été employé à la place du signe =.

3. Une difficulté de langage

Malheureusement, en français, on utilise parfois le mot « équivalent » dans un sens différent de celui employé en mathématiques. Ainsi, on dira parfois que $(x+1)^2$ et x^2+2x+1 sont des formes équivalentes d'une même expression.

4. Valeur de vérité d'une équivalence

Lorsque A et B sont deux propositions, la proposition A $\Leftrightarrow$ B peut être vraie ou fausse.

• Exemple d'équivalence vraie : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (attention c'est bien « ou » et non « et »).

• Exemple d'équivalence fausse : $a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$

$\Rightarrow$ fausse

$\Leftarrow$ fausse

5. Utilisation fréquente dans les chaînes d'équivalences

- Résolution d'équations et d'inéquations

- Équations de droites, de cercles...

- Recherche d'ensemble de points…

On peut remplacer l'expression « successivement équivalente à » par « $\Leftrightarrow$ ».

6. Quelques remarques

- Ne pas utiliser le signe « $\Leftrightarrow$ » à tort et à travers ; l'usage du symbole $\Leftrightarrow$ doit être réfléchi.

- Ne pas remplacer le signe « = » par « $\Leftrightarrow$ »

- Ne pas mélanger de « si et seulement si » avec des « $\Leftrightarrow$ »

- Ne pas utiliser d'équivalence sans rien devant

7. Ensemble de référence sous-jacent

Exemples :

• L'équivalence « $a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b$ ou $a = -b$ » est vraie pour tous réels a et b.

• L'équivalence « $a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b$ » est vraie :

- pour tout couple (a ; b) de réels positifs ou nuls ;

- pour tout couple (a ; b) de réels négatifs ou nuls.

On voit ici que l'ensemble de référence est tout à fait capital. Il s'agit d'une quantification d'une équivalence (il s'agit en fait d'une équivalence quantifiée).
Cette quantification doit être explicite de manière générale.

La proposition « pour tout couple (a, b) de réels $(a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b)$ » (que l'on peut aussi écrire de manière symbolique « $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\; (a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b)$ ») est fausse.
Les propositions « $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \;\; (a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b)$ » ou « $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_-)^2 \;\; (a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b)$ » sont vraies.

* Le mot « proposition » est employé ici dans un sens très large. On aura assez souvent des équivalences entre prédicats, qui ne sont pas des propositions mathématiques. En effet, un prédicat, est une phrase mathématique qui n'a pas de valeur de vérité. C'est le cas de l'exemple qui est donné après. La phrase $x > 1$ est un prédicat. On ne sait pas la valeur de vérité lorsque l'on ne connaît pas la valeur de *x*.

** On pourrait en revanche écrire $\mathrm{A} = (x+1)^2 \Leftrightarrow \mathrm{A} = x^2 + 2x + 1$.
Nous éviterons d'employer l'équivalence car c'est un simple calcul.