Test sur les fonctions polynômes du second degré

À faire sans calculatrice.

I. Vrai ou Faux

Justifier la réponse dans chaque cas.

1°) La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 coupe toujours l'axe des abscisses en 2 points.

2°) Si $a > 0$, la fonction *f* définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (où α et β sont deux réels) est d'abord strictement croissante puis strictement décroissante.

3°) On a $-5 < -3$ donc $(-5)^2 < (-3)^2$.

4°) La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 (dans un repère orthogonal) admet toujours (O*x*) pour axe de symétrie.

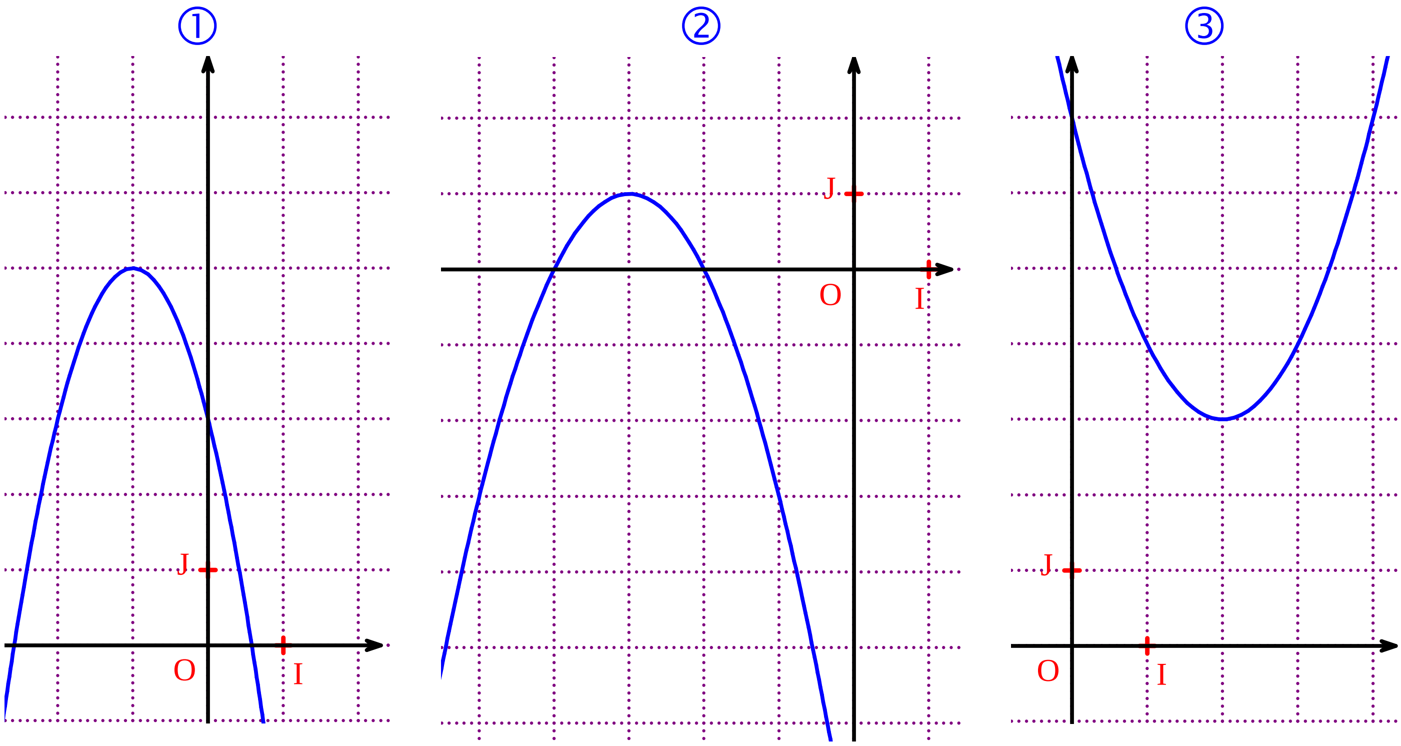
5°) Il est toujours nécessaire de dresser un tableau de signes pour résoudre une équation produit.

II. On considère les trois fonctions polynômes de degré 2 suivantes, données chacune par leur forme canonique :

a) $f_1(x) = (x-2)^2 + 3$ b) $f_2(x) = -2(x+1)^2 + 5$ c) $f_3(x) = 1 - (x+3)^2$

On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Associer à chacune de ces fonctions, en justifiant, sa courbe représentative parmi les 3 proposées ci-dessous :



Corrigé

I. Vrai ou Faux

1°) La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 coupe toujours l'axe des abscisses en 2 points.

Faux.

Si $a < 0$ et $\beta < 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.
Si $a > 0$ et $\beta > 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Formulation avec emploi de termes incorrects

« Pour une parabole croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$, si $\beta < 0$ alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses. Pour une parabole décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$, si $\beta > 0$ alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses. »

2°) Si $a > 0$, la fonction f définie par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ (où α et β sont deux réels) est strictement croissante puis strictement décroissante.

Vrai, d'après la règle de cours sur les variations d'une fonction polynôme du second degré.

Formulation incorrecte du point de vue du vocabulaire :

« Vrai, car si le coefficient directeur de la fonction polynôme de degré 2 est positif alors la parabole aura un maximum et sera strictement croissante puis strictement décroissante. »

3°) On a $-5<-3$ donc $(-5)^2<(-3)^2$.

Faux, car $(-5)^2=25$, $(-3)^2=9$ et $9<25$ donc $(-3)^2<(-5)^2$.

Réponse un peu moins bien mais correcte :

« Faux, car la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ puis croissante sur $[0\,;+\infty[$ et on sait que -5 et -3 appartiennent à cet intervalle donc on inverse l'ordre.
Ce qui donne : $-5<-3$ donc $(-5)^2>(-3)^2$. »

4°) La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 (dans un repère orthogonal) admet toujours (O*x*) pour axe de symétrie.

Réponse pas tout à fait correcte :

Faux. Car si la courbe représentative de f admettait l'axe (O*x*) pour axe de symétrie, alors la courbe « reviendrait sur elle-même », c'est-à-dire qu'il existerait deux images pour certains nombres x.

5°) Il est toujours nécessaire de dresser un tableau de signes pour résoudre une équation produit.

Faux. Il est nécessaire de tracer un tableau de signes pour résoudre une inéquation produit et non une équation produit car on n'a pas besoin de se préoccuper des signes.

II.

Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont des fonctions polynômes de degré 2 donc leurs représentations graphiques $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sont des paraboles.

Méthode : vérification du sommet, de la concavité et de l'axe de symétrie.

• $\mathcal{C}_1$ est la seule à être de concavité tournée vers le haut, car le coefficient de x^2 est strictement positif (1).
Le sommet de $\mathcal{C}_1$ a pour coordonnées (2 ; 3).
$\mathcal{C}_1$ admet la droite d'équation $x = 2$ pour axe de symétrie donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentée sur le graphique 3.

• $\mathcal{C}_2$ a sa concavité tournée vers le bas car le coefficient de x^2 est strictement négatif (– 2).
Le sommet de $\mathcal{C}_1$ a pour coordonnées (2 ; 3).
Les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_2$ sont (– 1 ; 5).
$\mathcal{C}_2$ admet la droite d'équation $x = -1$ pour axe de symétrie donc $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentée sur le graphique 1.

• $\mathcal{C}_3$ a sa concavité tournée vers le bas car le coefficient de x^2 est strictement négatif (– 1).
Les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_3$ sont (– 3 ; 1).
$\mathcal{C}_3$ admet la droite d'équation $x = -3$ pour axe de symétrie donc $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentée sur le graphique 2.

On peut évidemment vérifier ces résultats sur calculatrice graphique.

Formulation fausse du point de vue du vocabulaire :

« La fonction f_1 a comme extremum (2 ; 3) et elle a un coefficient directeur positif (1) donc elle est strictement décroissante puis strictement croissante et elle a un minimum qui est (2 ; 3) ce qui se retrouve sur sa représentation graphique donc la fonction f_1 a comme courbe représentative la numéro 3. »

« La fonction f_2 a comme extremum (– 1 ; 5) et elle a un coefficient directeur négatif (– 2) donc elle est strictement croissante puis strictement décroissante et elle a un maximum qui est (– 1 ; 5), ce qui se retrouve sur sa représentation graphique donc la fonction f_2 a comme courbe représentative la numéro 1. »

« La fonction f_3 a comme extremum (– 3 ; 1) et elle a un coefficient directeur négatif (– 1) donc elle est strictement croissante puis strictement décroissante et elle a un maximum qui est (– 3 ; 1), ce qui se retrouve sur sa représentation graphique donc la fonction f_3 a comme courbe représentative la numéro 2. »