Exercices sur les vecteurs (1)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit DEF un triangle quelconque.

On note P et Q les points définis par $\overrightarrow{DP} = -3\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$.

Démontrer que les points D, P, Q sont alignés.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit ABCD un parallélogramme.

On note I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

1°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$.

b) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$.

2°) En déduire que les points C, I, J sont alignés.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les points A, M, N sont alignés.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soit DEF un triangle.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{DM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DN} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DF}$.

Démontrer que les points D, M, N sont alignés.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Soit IJKL un parallélogramme.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LN} = 2\overrightarrow{JK} - 5\overrightarrow{IJ}$.

1°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{KM} = 3\,\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{JK}$.

b) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{KN} = -6\,\overrightarrow{IJ} + 2\,\overrightarrow{JK}$.

2°) Démontrer que les points K, M, N sont alignés.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$.)

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$.)

$\boxed{\mathbf{8}}$ Soit ABC un triangle quelconque.

On note E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$.)

$\boxed{\textbf{9}}$ Soit IJK un triangle quelconque.
On note R et S les points définis par $\overrightarrow{JR} = 2\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IK} - 3\overrightarrow{IJ}$.
Démontrer que les droites (IJ) et (RS) sont parallèles.
(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IS}$.)

$\boxed{\textbf{10}}$ Soit ABC un triangle quelconque.
On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.
(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.)

$\boxed{\textbf{11}}$ Soit RSTU un parallélogramme.
On note M et N les points définis par $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RU}$ et $\overrightarrow{RN} = 3\overrightarrow{RU} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$.
Démontrer que les points M, S et N sont alignés.
Indication : Exprimer $\overrightarrow{SN}$ en fonction de $\overrightarrow{RS}$ et de $\overrightarrow{RU}$.

$\boxed{\textbf{12}}$ Soit A et B deux points du plan.
On note M le point tel que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Soit A et B deux points du plan.
On note M le point tel que $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

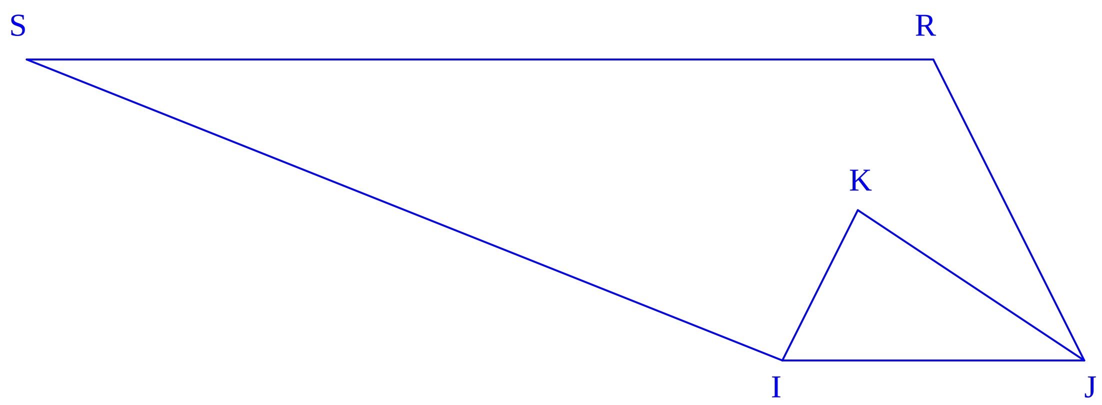
disposition des points pour les figures

$\boxed{\mathbf{9}}$

IJK : triangle quelconque

$\overrightarrow{JR} = 2\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IK} - 3\overrightarrow{IJ}$



Démontrons que les droites (IJ) et (RS) sont parallèles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IS}\\ &= -2\overrightarrow{JK} - \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IK} - 3\overrightarrow{IJ}\\ &= -2\left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IK}\right) - \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IK} - 3\overrightarrow{IJ}\\ &= -3\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

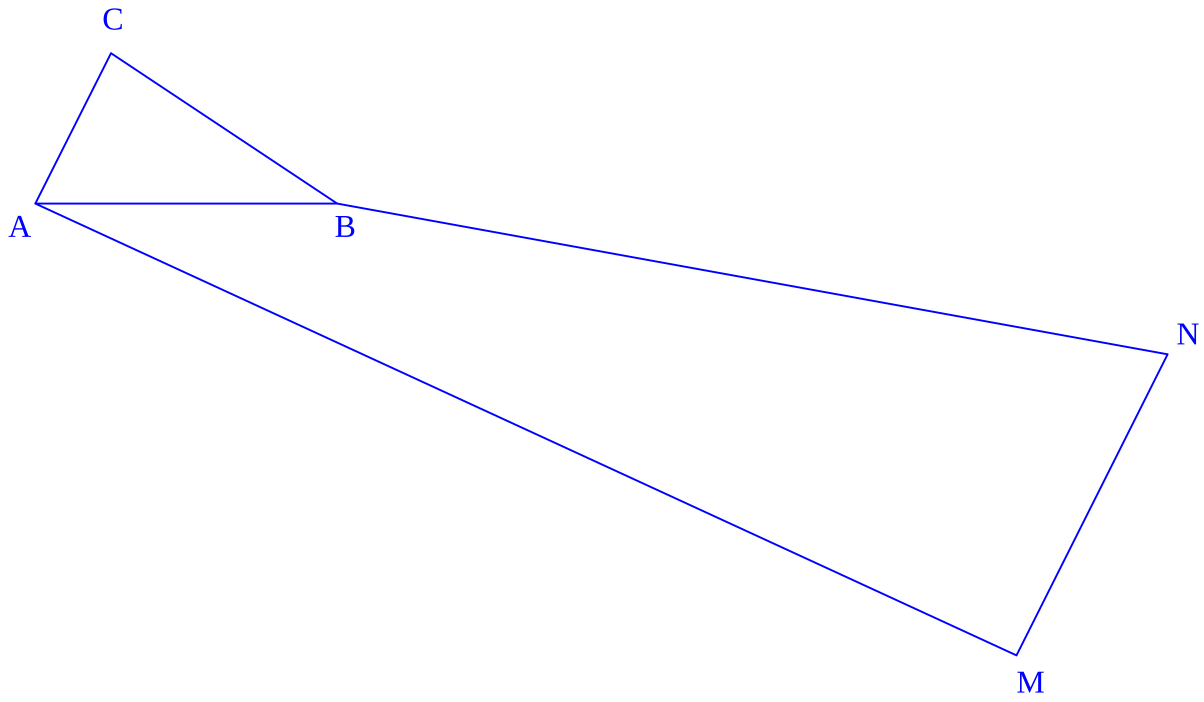
Donc $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.
Par suite, (IJ) et (RS) sont parallèles.

10

ABC : triangle quelconque

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$



Démontrons que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Par suite, (MN) et (AC) sont parallèles.

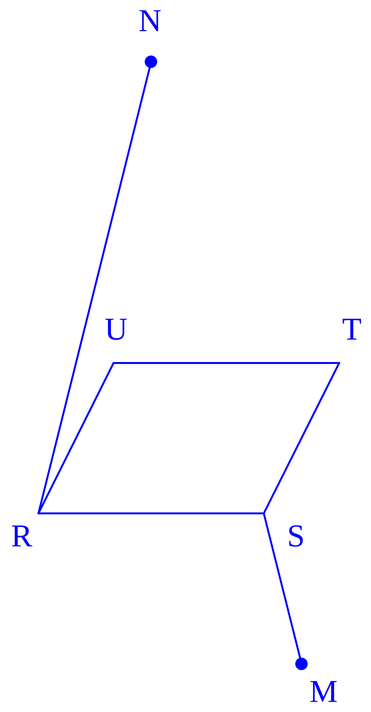
$\boxed{\textbf{11}}$

RSTU : parallélogramme

$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RU}$

$\overrightarrow{RN} = 3\overrightarrow{RU} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$

Démontrons que les points M, S et N sont alignés.



$\boxed{\textbf{12}}$

$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\textbf{13}}$

$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AM} = -\,2\overrightarrow{AB}$