TS3

Contrôle du jeudi 12 mai 2011 (4 h)

- **Au début de la copie, aménager un cartouche de présentation avec le numéro des exercices de I à V permettant d'indiquer le nombre de points pour chaque exercice.**
- **Rédiger très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume. Ne pas utiliser d'abréviations.**
- **Mettre les résultats demandés bien en évidence en les encadrant en rouge à la règle.**
- **Tous les traits de fraction doivent être tirés à la règle.**
- **Ne pas rendre l'énoncé dans la copie.**
- **Ne rien écrire, ne rien surligner, ne rien entourer sur l'énoncé (même au crayon).**
- **Compléter la feuille de réponses au stylo ; ne rien entourer sur l'énoncé (même au crayon).**
- **Les exercices I, II, III sont à faire sur la feuille annexe à insérer dans la copie.**

Le barème est donné sur 40.

I. (12 points) Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;
- le plan P passant par le point B et orthogonal à (AB) ;
- le plan Q d'équation cartésienne $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère S de centre A passant par B.

Dans cet exercice, aucun détail n'est demandé sur la copie ; on se contentera de remplir le tableau de la feuille à remettre dans la copie en s'efforçant de ne pas déborder hors des cases.

1°) Donner une équation cartésienne du plan P.
2°) Donner une équation de la sphère S (inutile de développer cette équation).
3°) Calculer la distance du point A au plan Q. En déduire la position relative du plan Q et de la sphère S.
4°) Donner un système d'équations paramétriques de la droite D passant par le point A et orthogonale à Q.
5°) Donner les coordonnées du point de contact C de S et de Q.
6°) Déterminer le système d'équations paramétriques de la droite D' d'intersection de P et Q obtenu en considérant le système formé par les équations cartésiennes des deux plans et en prenant x pour paramètre (c'est-à-dire que la première ligne du système d'équations paramétriques de la droite D' s'écrira $x = t$, en notant t le paramètre).

II. (8 points) Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de pile lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de pile lors d'un jet de pièce équilibrée est de $\frac{1}{2}$.

1°) On prend une pièce au hasard, on la lance.

Dans cette question, donner les probabilités sous forme décimale.

a) Calculer la probabilité d'obtenir pile.
b) Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu pile ?

2°) On prend une pièce truquée au hasard et on la lance 4 fois.

Dans cette question, donner les probabilités sous forme fractionnaire.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois pile ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

3°) On prend une pièce non truquée.
Combien de fois au minimum faut-il la lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile soit strictement supérieure à 0,999 999 ?

Partie B

Trois expériences de 100 lancers de trois pièces ont donné les résultats suivants :

Pièce	A	B	C
Nombre de « Pile »	57	53	60
Nombre de « Face »	43	47	40

On a effectué la simulation de 100 lancers d'une pièce suivant la loi équirépartie.

On pose $d_{obs}^2 = \left(f_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{2}\right)^2$ où f_1 désigne la fréquence de « Pile » et f_2 la fréquence de « Face ».

On a recommencé 2 000 fois cette simulation, on obtient un échantillonnage de valeurs de d_{obs}^2 de taille 2 000.

La série de 2 000 valeurs de d_{obs}^2 a donné les paramètres suivants (valeurs arrondies à 10^{-4} près).

Paramètre	Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
Valeur arrondie à 10^{-4} près	0	0,001 6	0,003 6	0,014 4	0,025 6	0,221 6

Pour chacune des pièces A, B, C, dire si elle est équilibrée au risque de 10 %.
Détailler toute la démarche pour la pièce A.
Pour les autres pièces, donner les résultats sans détailler.

III. (4 points) Les deux parties sont indépendantes.

Dans cet exercice, les résultats des probabilités seront tous donnés sous forme de fractions irréductibles (tirer les traits de fraction à la règle).

Partie A

Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.

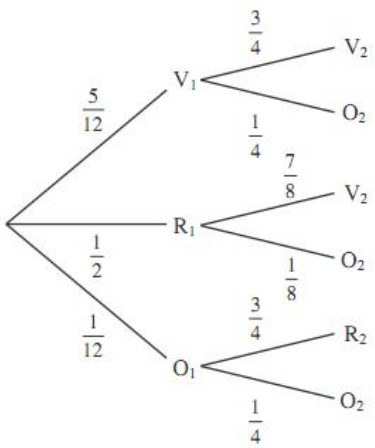
Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\frac{5}{12}$, à l'orange $\frac{1}{12}$ et au rouge $\frac{1}{2}$.

On note :
R_1 l'événement : le premier feu rencontré est au rouge
V_1 l'événement : le premier feu rencontré est au vert
O_1 l'événement : le premier feu rencontré est à l'orange
et on définit de même R_2, V_2, O_2 pour le deuxième feu rencontré.

1°) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2°) Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

Partie B

On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide.
L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.



1°) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?

2°) Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

IV. (7 points) Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x}\,dx$ (on admettra que l'on ne peut calculer la valeur exacte de cette intégrale).

1°) a) Faire le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle [0 ; 1].
Donner directement le résultat de la dérivée sous la forme la plus simple possible sans détailler les calculs.
Tirer les traits de fraction à la règle (traits de fractions horizontaux).
Faire le tableau de variation et la flèche de variation à la règle.
Mettre directement dans le tableau les valeurs des extremums (valeurs exactes) <u>sans détailler les calculs sur la copie</u>.

b) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] on a : $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ (i).

2°) On pose $J = \int_0^1 (2+x)\,e^{-x}\,dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

a) Au moyen d'une intégration par parties calculer J (valeur exacte).

b) Utiliser l'encadrement (i) pour démontrer que l'on a : $\frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.

c) Exprimer J + K en fonction de I.
d) Déduire de tout ce qui précède une valeur approchée à 10^{-2} près de I.
e) **Question facultative (indépendante des questions précédentes) :** à l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-6} près de I.

V. (9 points) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C, P et le vecteur $\vec{w}$ d'affixes respectives :
$z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

On note h l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$, t la translation de vecteur $\vec{w}$ et r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On fera une figure au brouillon sur une feuille à petits carreaux en prenant 2 cm pour unité de longueur (ne pas rendre cette figure dans la copie).

1°) Calculer les affixes des points Q = t (B), R = h (P) et S = r (P).
Présenter les calculs avec soin (sans détailler toutes les étapes du calcul).

2°) Calculer le quotient $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ (sans détailler le calcul).
Ecrire le résultat sous forme exponentielle sans explication ; en déduire la nature du triangle PQR (de manière très précise).
3°) Déterminer la nature du quadrilatère PQRS.

Feuille à remettre dans la copie

A compléter à l'encre.

Prénom : ……. **Nom : …….**

I. (12 points) Ne mettre qu'une seule réponse à chaque fois. Ecrire très lisiblement et sans rature en formant bien les lettres et les chiffres.

1°) Equation cartésienne du plan P :	……
2°) Equation cartésienne de la sphère S :	……
3°) Distance du point A au plan Q :	d(A ; Q) =……
Position relative du plan Q et la sphère S :	Le plan Q et la sphère S sont …….
4°) Système d'équations paramétriques de D :	$\begin{cases} x = \ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
5°) Coordonnées cartésiennes de C :	C(….. ; ….. ; …..)
6°) Système d'équations paramétriques de D' :	$\begin{cases} x = t \\ y = \ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

II. (8 points)

Ecrire chaque fois <u>un seul</u> résultat sans faire de phrase.

Partie A

1°)	
a) Probabilité d'obtenir pile :	……
b) Probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu pile :	……
2°)	
a) Probabilité d'obtenir 4 fois pile :	……
b) Probabilité d'obtenir au moins une fois pile :	……
3°)	
Nombre minimum de fois qu'il faut lancer la pièce pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile soit strictement supérieure à 0,999999.	……

Partie B

Compléter le tableau en mettant des croix dans les colonnes correspondant aux réponses choisies :

	équilibrée	**non équilibrée**
Pièce A		
Pièce B		
Pièce C		

Détail de la démarche pour la pièce A :

…..……

…..……

…..……

…..……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points)

Compléter en donnant les résultats des probabilités sous la forme de fractions irréductibles (traits de fraction à la règle). N'écrire qu'un seul résultat à chaque fois.

Partie A	
1°) Probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert :	……
2°) Probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert :	……
Partie B	
1°) Probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert :	……
2°) Probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert :	……

Prénom : ……. **Nom : …….**

I (12)	II (8)	III (4)	IV (7)	V (9)

Corrigé du contrôle du 12 mai 2011

I.

1°) Equation cartésienne du plan P :	$2x + y - z - 8 = 0$
2°) Equation de la sphère S :	$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$
3°) Distance du point A au plan Q :	d(A ; Q) = $\sqrt{6}$
Position relative du plan Q et la sphère S :	Le plan Q et la sphère S sont tangents.
4°) Système d'équations paramétriques de D :	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
5°) Coordonnées cartésiennes de C :	C(0 ; 2 ; – 1)
6°) Système d'équations paramétriques de D' :	$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Détail des calculs pour certaines questions :

1°) Soit M(x, y, z) un point quelconque de l'espace.

$\overrightarrow{AB}(2, 1, -1)$

$$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)\times 2 + (y-2)\times 1 + z \times (-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6 + y - 2 - z = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y - z - 8 = 0 \end{aligned}$$

2°) $AB^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$

Donc S a pour équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$.

3°) On applique la formule de distance d'un point à un plan.

$$d(A ; Q) = = \frac{|1\times 1 - 1\times 1 + 2\times 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

4°) Le vecteur $\vec{n}(1 ; -1 ; 2)$ est un vecteur normal à Q donc comme $D \perp Q$, c'est un vecteur directeur de D.

La droite D passe par le point A(1, 1, 1) donc D admet pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

5°) Le point C est le point d'intersection de Q et de D.
On utilise le système d'équations paramétriques de D et l'équation cartésienne de D trouvés dans les questions précédentes.
Le paramètre t du point C vérifie l'équation : $1 + t - 1 + t + 2 + 4t + 4 = 0$.

On trouve $t = -1$.

6°) On résout le système $\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ 2x + y - z - 8 = 0 \\ x = t \end{cases}$.

Ce système est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} y = t + 2z + 4 \\ y = z - 2t + 8 \\ x = t \end{cases} \qquad \begin{cases} 3t + z - 4 = 0 \\ z = 4 - 3t \\ x = t \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \\ x = t \end{cases}$$

Remarque :

$$d(A, P) = \frac{|2x_A + y_A - z_A - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{|2+1-1-8|}{\sqrt{6}}$$
$$= \sqrt{6}$$

On constate que d(A, *P*) = d(A, *Q*).

II.

Partie A

1°)	
a) Probabilité d'obtenir pile :	0,6
b) Probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu pile :	0,5
2°)	
a) Probabilité d'obtenir 4 fois pile :	$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$
b) Probabilité d'obtenir au moins une fois pile :	$\frac{255}{256}$
3°)	
Nombre minimum de fois qu'il faut lancer la pièce pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile soit strictement supérieure à 0,999999.	20

Détail des réponses aux questions :

1°) a) On note S l'événement : « obtenir pile » et T l'événement : « tirer une pièce truquée ».

Faire un arbre de probabilités.

S et T constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \overline{T})$$
$$= 0,4 \times 0,75 + 0,6 \times 0,5$$
$$= 0,3 + 0,3$$
$$= 0,6$$

b) $P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)}$

$$= \frac{\frac{4}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{3}{5}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

2°) a) On note E l'événement « obtenir pile aux quatre lancers ».
On applique le principe multiplicatif (car les lancers sont indépendants).

$$P(E) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$ (une valeur approchée est 0,31)

b) On note F l'événement « obtenir au moins une fois pile sur les quatre lancers ».

$$P(F) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

3°) On cherche les entiers naturels *n* tels que $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,999999$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,000001$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < \ln 0,000001$$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{1}{2} < \ln 0,000001$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,000001}{\ln 2}$$

D'après la calculatrice, on a : $\frac{\ln 0,000001}{\ln 2} = 19,93...$

Donc le nombre minimal de lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile sur les quatre lancers soit supérieure ou égale à 0,999 999 est 20.

Partie B

	équilibrée	**non équilibrée**
Pièce A	×	
Pièce B	×	
Pièce C	×	

Pour la pièce A :

$f_1 = 0,57 \qquad f_2 = 0,43$

On pose $d_{obs}^2 = (0,57-0,5)^2 + (0,43-0,5)^2 = 0,07^2 + (-0,07)^2 = 0,0098$

$d_{obs}^2 < D_9$ donc la pièce A est équilibrée.

Pour la pièce B :

$f_1 = 0,53 \qquad f_2 = 0,47$

On pose $d_{obs}^2 = (0,53-0,5)^2 + (0,47-0,5)^2 = (0,03)^2 + (-0,03)^2 = 0,0018$.

$d_{obs}^2 < D_9$ donc la pièce B est équilibrée.

Pour la pièce C :

$f_1 = 0,6 \qquad f_2 = 0,4$

On pose $d_{obs}^2 = (0,6-0,5)^2 + (0,4-0,5)^2 = (0,1)^2 + (-0,1)^2 = 0,02$.

$d_{obs}^2 < D_9$ donc la pièce C est équilibrée.

III.

Partie A

1°) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?

$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2)$ car les fonctionnements des deux feux tricolores sont supposés indépendants

$$= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}$$
$$= \frac{25}{144}$$

2°) Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

Soit E l'événement : « au moins l'un des deux feux rencontré n'est pas vert ».

$$P(E) = 1 - P(V_1 \cap V_2)$$
$$= 1 - \frac{25}{144}$$
$$= \frac{119}{144}$$

Partie B

1°) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?

Dans cette partie, les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2)$$
$$= \frac{5}{12} \times \frac{3}{4}$$
$$= \frac{5}{16}$$

2°) Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap V_2)$$
$$= \frac{5}{12} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$$
$$= \frac{5}{16} + \frac{7}{16}$$
$$= \frac{12}{16}$$
$$= \frac{3}{4}$$

IV. $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x}\, dx$

1°) a) $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{2-x}$

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur l'intervalle [0 ; 1] donc f est dérivable sur [0 ; 1].

$\forall x \in [0 ; 1] \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}(2-x) - (-1) \times e^{-x}}{(2-x)^2}$

$$= \frac{x e^{-x} - e^{-x}}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{e^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$$

x	0		1
SGN de e^{-x}		+	
SGN de $x-1$		–	0
SGN de $(2-x)^2$		+	
SGN de $f'(x)$		–	0
Variations de f	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{e}$

b) Déduisons-en que $\forall\, x \in [0\,;1]$ $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ (i).

1ère méthode :

La fonction f est décroissante sur [0 ; 1].

Le maximum de f sur [0 ; 1] est $f(0)=\frac{1}{2}$.

Le minimum de f sur [0 ; 1] est $f(1)=\frac{1}{e}$.

f est bornée par son maximum et son minimum d'où $\forall\, x \in [0\,;1]$ $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ (i).

2e méthode :

La fonction f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 1].

Donc $\forall\, x \in [0\,;1]$ $f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1)$.

Par conséquent, on a : $\forall\, x \in [0\,;1]$ $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ (i).

2°) a) Calculons J.

$$J=\int_0^1 (2+x)\,e^{-x}\,dx$$

On procède par IPP.

On pose : $u'(x)=e^{-x}$ $\quad v(x)=2+x$ (principe « ALPES »)

$u(x)=-e^{-x}$ $\quad v'(x)=1$

$$\begin{aligned}
J &= \left[(2+x)\times\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx\\
&=(2+1)\times\left(-e^{-1}\right)-(2+0)\times\left(-e^{-0}\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1\\
&=3\times\left(-\frac{1}{e}\right)-2\times(-1)-\left(\frac{1}{e}-1\right)\\
&=-\frac{3}{e}+2-\left(\frac{1}{e}-1\right)\\
&=3-\frac{4}{e}
\end{aligned}$$

N.B. : On peut vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

b) Utilisons l'encadrement (i) pour démontrer que l'on a : $\frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.

$$K=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

$\forall\, x \in [0\,;1]$ $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$

En multipliant les deux membres de cet encadrement par x^2 (qui est positif ou nul), on obtient

$\forall\, x \in [0\,;1]$ $\frac{x^2}{e} \leq x^2 f(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

Par croissance de l'intégrale, on peut donc écrire : $\int_0^1 \frac{x^2}{e}\,dx \leq \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e}\,dx=\frac{1}{e}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{e}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3e}$$

De même, on a : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$

On en déduit que : $\frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.

c) Exprimons J + K en fonction de I.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}+\mathrm{K} &= \int_0^1 (2+x)\ \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[(2+x)\ \mathrm{e}^{-x} + x^2 f(x)\right] \mathrm{d}x \qquad \text{(on utilise la linéarité pour tout regrouper sous une même intégrale)} \\
&= \int_0^1 \left[(2+x)\ \mathrm{e}^{-x} + x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(2+x+\frac{x^2}{2-x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{(2+x)(2-x)+x^2}{2-x}\times \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4-x^2+x^2}{2-x}\times \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4}{2-x}\times \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4\,\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\ \mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\ \mathrm{d}x \\
&= 4\,\mathrm{I}
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\mathrm{J}+\mathrm{K}=4\mathrm{I}$.

d) **Déduisons-en une valeur approchée à 10^{-2} près de I.**

On sait que $\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{J}+\mathrm{K}}{4}$.

On part de l'encadrement : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \le \mathrm{K} \le \dfrac{1}{6}$ (i).

On ajoute J (dont on connaît la valeur) à chaque membre l'encadrement.

On obtient : $3-\dfrac{4}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \le \mathrm{J}+\mathrm{K} \le 3-\dfrac{4}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{6}$.

soit $3-\dfrac{11}{3\mathrm{e}} \le \mathrm{J}+\mathrm{K} \le \dfrac{19}{6}-\dfrac{4}{\mathrm{e}}$

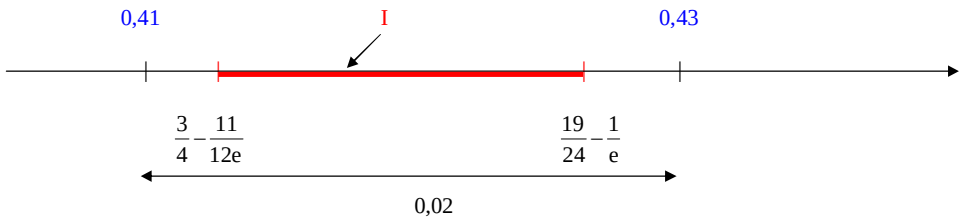
Or J + K = 4I donc $3-\dfrac{11}{3\mathrm{e}} \le 4\mathrm{I} \le \dfrac{19}{6}-\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

Par conséquent, $\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{12\mathrm{e}} \le \mathrm{I} \le \dfrac{19}{24}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Avec la calculatrice, on trouve :

$\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{12\mathrm{e}} = 0,412777178...$

$\dfrac{19}{24}-\dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0,423787225...$



On en déduit que l'on a : $0,41 \le \mathrm{I} \le 0,43$ (il n'est pas question d'arrondi).

Amplitude de cet encadrement : 0,43 – 0,41 = 0,02

Le centre de l'intervalle [0,41 ; 0,43] est égal à 0,42.
On a donc | I – 0,42 | ⩽ 0,01.
Donc une valeur approchée de I à 10^{-2} près est 0,42.

e) **Question facultative :**

A l'aide de la calculatrice, on trouve : I = 0,414 006…
Ce résultat est en accord avec la valeur approchée déterminée à la question précédente.

V. $z_{\mathrm{A}}=\dfrac{3}{2}+6\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}}=\dfrac{3}{2}-6\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}}=-3-\dfrac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{P}}=3+2\mathrm{i}$, $z_{\vec{w}}=-1+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$

h : homothétie de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$

t : translation de vecteur $\vec{w}$

r : rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

1°) Calculons les affixes des points Q = *t* (B), R = *h* (P) et S = *r* (P).

Calculons l'affixe du point Q = *t* (B).

D'après l'expression complexe d'une translation, on a :

$$\begin{aligned}
z_{\mathrm{Q}} &= z_{\mathrm{B}} + z_{\vec{w}} \\
&= \frac{3}{2}-6\mathrm{i}-1+\frac{5}{2}\mathrm{i} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Calculons l'affixe du point R = h (P).

D'après l'expression complexe d'une homothétie, on a :

$$\begin{aligned} z_R &= -\frac{1}{3}\left(z_P - z_C\right) + z_C \\ &= -\frac{1}{3}\left(3+2i+3+\frac{1}{4}i\right) - 3 - \frac{1}{4}i \\ &= -\frac{1}{3}\left(6+\frac{9}{4}i\right) - 3 - \frac{1}{4}i \\ &= -5 - i \end{aligned}$$

Calculons l'affixe du point S = r (P).

D'après l'expression complexe d'une rotation, on a :

$$\begin{aligned} z_S &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_P - z_A\right) + z_A \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(3+2i-\frac{3}{2}-6i\right) + \frac{3}{2} + 6i \quad * \\ &= \frac{9i}{2} - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

On calcule à part : $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ (cela dit, c'est un résultat qui doit être connu par cœur)

2°) Calculons le quotient $Z = \dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.

$$Z = \frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

On vérifie le calcul grâce à la calculatrice (en utilisant la touche adéquate pour le nombre i).

Module de Z :

$$|Z| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = 1 \quad (\text{car } \forall\theta \in \mathbb{R} \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1)$$

$$|Z| = \left|\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right| = \frac{\left|z_R - z_Q\right|}{\left|z_P - z_Q\right|} = \frac{QR}{QP}$$

Donc $\dfrac{QR}{QP} = 1$ d'où $QR = QP$.

On en déduit que le triangle PQR est isocèle en Q.

Argument de Z :

$$\arg(Z) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Or $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right) = \left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}\right)$

$$\left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}\right) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

On en déduit que le triangle PQR est rectangle en Q.

Conclusion :

Le triangle PQR est isocèle rectangle en Q.

3°) Déterminons la nature du quadrilatère PQRS.

Il y avait plusieurs démarches possibles, plus ou moins longues, plus ou moins astucieuces.

Voici la démarche la plus simple, la plus courte, la plus élégante :

$$z_{\overrightarrow{PQ}} = z_Q - z_P = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\right) - \left(3+2i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$$

$$z_{\overrightarrow{SR}} = z_R - z_S = \left(-5-i\right) - \left(-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$$

On constate donc que l'on a : $z_{\overrightarrow{PQ}} = z_{\overrightarrow{SR}}$.

Par suite, on a : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

On en déduit que PQRS est un parallélogramme.
Comme il a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur, on en déduit que c'est un carré.