Exercices sur les intégrales doubles

1 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\right\}$ où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

2 On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,-1\leqslant x\leqslant 0\,;\ -1\leqslant y\leqslant x\right\}$.

Le but de l'exercice est de calculer $\mathrm{I}=\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{y^2}\,dxdy$ par deux méthodes indépendantes.

Commencer par représenter le domaine D.

1ère méthode : Calculer I directement.

2e méthode : Déterminer une forme différentielle ω de degré 1 définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d\omega=\mathrm{e}^{y^2}\,dxdy$; en déduire le calcul de I.

3 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\iint_{[0\,;1]^2}\frac{dx\,dy}{1+x^n+y^n}$.

4 Calculer $\displaystyle\iint_{[0\,;1]^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

5 Calculer $\displaystyle\iint_D f$ où f est la fonction définie par $f(x,y)=\cos(xy)$ et $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,1\leqslant x\leqslant 2\,;0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2x}\right\}$.

6 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+1}\,dx\,dy$ où $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leqslant 1\,;y\geqslant 0\right\}$.

7 Calculer $\displaystyle\iint_D f$ où f est la fonction définie par $f(x,y)=x\cos(xy)$ et $D=\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0\,;1]$.

8 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+1}\,dx\,dy$ dans chacun des deux cas suivants :

1er cas : $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leqslant x\leqslant 1\,;0\leqslant y\leqslant x^2\right\}$;

2e cas : $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0\,;y\geqslant 0\,;0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

9 Calculer $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy$ où $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leqslant x\leqslant 1\,;0\leqslant y\leqslant x^2\right\}$.

10 Soit a un réel strictement positif.

On note $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,|x|+|y|\leqslant a\right\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \left|x^2-y^2\right|\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy$.

Indication : Utiliser le changement de variables $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$.

11 On pose $\mathrm{K}=[a\,;b]\times[\alpha\,;\beta]$ où a, b, α, β sont des réels tels que $0<a<b$ et $0<\alpha<\beta$.

En considérant $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}}\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy$, démontrer que $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{e}^{bx}-\mathrm{e}^{ax}}{x}\,dx=\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{\beta x}-\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,dx$.

Soit a, b, α, β des réels tels que $0<a\leqslant b$ et $0<\alpha\leqslant\beta$.

Soit f une fonction continue de $[a\alpha\,;b\beta]$ dans $\mathbb{R}$.

On note F une primitive de f sur $[a\alpha\,;b\beta]$.

Démontrer que $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{F}(bx)-\mathrm{F}(ax)}{x}\,dx=\int_a^b\frac{\mathrm{F}(\beta x)-\mathrm{F}(\alpha x)}{x}\,dx$.

Indication (à donner ?) : Considérer $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}} f(xy)\,dx\,dy$ avec $\mathrm{K}=[a\,;b]\times[\alpha\,;\beta]$.

12 On admet que les propriétés des intégrales doubles pour les fonctions à valeurs complexes sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles.

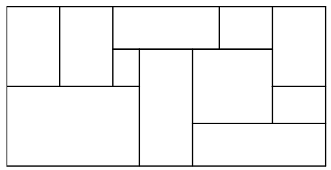
1°) Soit P le pavé $[a,b]\times[c,d]$ (a, b, c, d réels tels que $a<b$ et $c<d$).

Démontrer que P a un côté entier si et seulement si $\displaystyle\iint_P \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x+y)}\,dx\,dy=0$.

2°) Soit R un rectangle du plan subdivisé en un nombre fini de petits rectangles qui ont chacun un côté rationnel.

Démontrer que R a un côté rationnel.

Indication : Se ramener à des côtés entiers par homothétie puis utiliser l'additivité.



13 On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0\,;y\geqslant 0\,;x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

Calculer $\mathrm{I}=\displaystyle\iint_D\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$.

14 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left[0\,;R^2\right]$ où R est un réel strictement positif à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note D le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0\,;0)$ et de rayon R.

Donner une autre expression de l'intégrale $\iint_D f\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

15 Soit f une fonction définie et continue sur $[-1\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note D le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0\,;0)$ et de rayon1.

Donner une autre expression de l'intégrale $\iint_D f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

16 Soit f une fonction continue sur $[0\,;2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose $D=[0\,;1]^2$. Soit F une primitive de f sur $[0\,;2]$.

Démontrer que $\iint_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^2 F(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$.

Applications : Calculer $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x+y}$, $\iint_D \ln(1+x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (retrouver le résultat par une autre méthode), $\iint_D (x+y)^{\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où α désigne un réel positif.

17 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose $D=I^2$.

Donner une autre expression des intégrales $\iint_D f\left(\max(x,y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\iint_D f\left(\min(x,y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

On peut remplacer I par $I=[a\,;b]$.

18 On pose $D=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$.

Calculer $\iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

19 Soit f une fonction définie, continue et croissante sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose $D=[0\,;1]^2$.

On note F une primitive de f sur $[0\,;1]$.

Démontrer que $\iint_D \left|f(x)-f(y)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2F(0)+2F(1)-4\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$.

Application : Calculer $\iint_D \left|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

20 Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\right\}$ où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

21 On pose $D=[0\,;1]^2$.

Calculer $\iint_D (2x+3y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

22 On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2-2x\leqslant 0\right\}$.

1°) Représenter le domaine D.

2°) Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Indication : Passer en coordonnées polaires.

23 Calculer $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0\,;y\geqslant 0\,;a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\right\}$ où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

24 1°) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que deux fonctions f et g définies sur I vérifient la condition (S) lorsque
$\forall (x,y)\in I^2\quad \left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\geqslant 0$.
Dans ce cas, on peut dire que les fonctions f et g sont synchrones.
Justifier que la condition (S) est vérifiée lorsque :

- l'une des deux fonctions f ou g est constante ;
- les deux fonctions f et g ont la même monotonie sur I ;
- $g=\lambda f$ avec λ réel positif ou nul quelconque ;
- $g=f+\lambda$ avec λ réel quelconque.

2°) Dans toute la suite, on suppose que :

- I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ dont la longueur est égale à 1 ;
- f et g sont deux fonctions définies sur I continues par morceaux vérifiant la condition (S).

Démontrer que l'on a : $\int_I f\times\int_I g\leqslant\int_I fg$.

Indication : Considérer $\iint_{I^2}\left[f(x)-f(y)\right]\left[g(x)-g(y)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Énoncer une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.
3°) Que donne l'inégalité précédente lorsque l'une des deux fonctions f ou g est constante ?
4°) Quelle inégalité obtient-on lorsque $f=g$? Retrouver ce résultat par une autre manière.

25 Soit a, b, c, d quatre réels strictement positifs tels que $a<b$ et $c<d$.
On pose $D=[a\,;b]\times[c\,;d]$.

Calculer $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy}$ et $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{xy}}$.

$\boxed{26}$ Calculer $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

$\boxed{27}$ Calculer $\displaystyle\iint_D (x+y+1)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ avec $D=[0\,;1]^2$.

$\boxed{28}$ Calculer $\displaystyle\iint_D x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, x+y\leqslant 1\right\}$.

$\boxed{29}$ Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ dans chacun des cas suivants :

1^er^ cas : $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, x^2+y^2\leqslant 1\right\}$;

2^e^ cas : $D=[0\,;1]^2$.

$\boxed{30}$ Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$ où a est un réel strictement positif.

$\boxed{31}$ Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\right\}$ où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

$\boxed{32}$ Calculer $\displaystyle\iint_D \ln\frac{x}{y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ avec $D=[1\,;\mathrm{e}]^2$ puis $\displaystyle\iint_D \ln\frac{x^\alpha}{y^\beta} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où α et β sont deux réels.

$\boxed{33}$ Calculer $\displaystyle\iint_D x^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où $D=[0\,;1]^2$.

$\boxed{34}$ Soit u une fonction définie et continue sur un intervalle $I=[a\,;b]$ (a et b étant deux réels, $a<b$) telle que $\forall t\in I \quad u(t)\geqslant 0$. On pose $D=[0\,;1]\times I$.

Exprimer $\displaystyle\iint_D x^{u(y)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sous la forme d'une seule intégrale sur I (en utilisant la fonction u).

$\boxed{35}$ Soit a un réel tel que $0<a<1$. On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, a\leqslant y\leqslant 1\,;\, 0\leqslant x\leqslant y\right\}$.

1°) Calculer $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

2°) Soit u une fonction définie et continue sur $[0\,;1]$.

Exprimer $\displaystyle\iint_D u\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 u(t) \, \mathrm{d}t$ et de a.

$\boxed{36}$ Calculer $\displaystyle\iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

$\boxed{37}$ Soit α un réel strictement positif. On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D xy^\alpha \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ de deux manières différentes.

1^ère^ manière : en utilisant la formule de Fubini
2^e^ méthode : en utilisant les coordonnées polaires

$\boxed{38}$ Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un segment I de $\mathbb{R}$. On pose $D=I^2$.

On considère les intégrales $A=\displaystyle\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ et $B=\displaystyle\iint_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Comparer A et B puis donner leurs valeurs.

Application :

On pose $K=[a\,;b]^2$, a et b étant deux réels tels que $a\leqslant b$. Calculer $\displaystyle\iint_K \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{x-y}+1}$.

$\boxed{39}$ Voir exercice $\boxed{14}$:
Soit a et b sont deux réels positifs ou nuls tels que $a\leqslant b$.

On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geqslant 0\,;\, y\geqslant 0\,;\, a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\right\}$.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

On note F une primitive de f sur $[a\,;b]$.

Démontrer que $\displaystyle\iint_D f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y=\left[F\left(b^2\right)-F\left(a^2\right)\right]\times\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{40}$ On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leqslant x\leqslant 1\,;\, 0\leqslant y\leqslant 1\,;\, x\geqslant y\right\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Idée notée le 26-4-2022

Même question avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leqslant x\leqslant \ln a\,;\, 0\leqslant y\leqslant \ln b\right\}$ où a et b sont deux réels strictement positifs donnés.

$\boxed{41}$ Soit a et b deux réels positifs ou nuls. On pose $D=[0\,;a]\times[0\,;b]$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}}$.

$\boxed{42}$ Soit a un réel positif. On pose $D=[0\,;a]^2$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{e}^{\min(x\,;\,y)}}{\mathrm{e}^{\max(x\,;\,y)}+1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

43 On pose $D=[0\,;1]^2$.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

On note F une primitive de f sur $[0\,;1]$.

Démontrer que $\displaystyle\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^0 F(x)\,\mathrm{d}x$.

44 On pose $I=[0\,;1]$ et $D=I^2$.

Soit f une fonction continue sur I.

On note F une primitive de f sur I.

Démontrer que $\displaystyle\iint_D f(|x-y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x-2F(0)$.

45 Soit f la fonction définie par $f(x,y)=\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}$.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

Calculer l'intégrale de f sur D.

46 Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2-2x\leqslant 0\right\}$.

47 Soit f une fonction continue de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0\,;y\geqslant 0\,;x+y\leqslant 1\right\}$.

Démontrer que $\displaystyle\iint_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Applications : Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y+1}$ et $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

48 Calculer l'intégrale de la fonction $f:(x\,;y)\mapsto(x+y)^2$ sur chacun des domaines suivants :

a) $D_1=[0\,;1]^2$;

b) $D_2=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leqslant 1\right\}$;

c) $D_3=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0\,;y\geqslant 0\,;x+y\leqslant 1\right\}$.

49 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leqslant 2x\,;x^2+y^2\leqslant 2y\right\}$.

50 Pour tout réel $R>0$, on pose $D(R)=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$.

Calculer $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D(R)}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$ ($\alpha>0$ fixé).

51 Calculer l'intégrale de la fonction $f:(x\,;y)\mapsto\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sur chacun des domaines suivants :

a) $D_1=[0\,;1]\times[1\,;2]$ (faire le calcul dans les deux sens) ;

b) $D_2=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$.

52 Calculer l'intégrale de la fonction $f:(x\,;y)\mapsto\sin(x+y)$ sur chacun des domaines suivants :

a) $D_1=\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]^2$ (deux méthodes : l'une en développant $\sin(x+y)$) ;

b) $D_2=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

53 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ avec $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leqslant x\leqslant 1\,;0\leqslant y\leqslant x\right\}$.

54 Calculer $\displaystyle\iint_K y\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $\mathrm{K}=[0\,;1]^2$.

55 Calculer $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\cos(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D=[a,b]\times[c,d]$ (a, b, c, d réels tels que $a<b$ et $c<d$).

56 Soit a un réel strictement positif donné.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $x(t)=a\cos^3 t$ et $y(t)=a\sin^3 t$ ($t\in\mathbb{R}$). Cette courbe porte le nom d'« astroïde ».

Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$.

Réponses

1 $I = 2\pi \ln \dfrac{b}{a}$ (On contrôle que le résultat est bien strictement positif.)

2 $I = \dfrac{e-1}{2}$

Rappel : dérivée d'une forme différentielle de degré 1

$$\omega = A\,dx + B\,dy$$
$$d\omega = \left(-\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

1ère idée (qui ici ne s'applique pas)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

① La dérivée de la forme différentielle $\omega = F(x)\,dy$ est définie par $d\omega = f(x)\,dx \wedge dy$.

Conséquence : $\displaystyle\iint_D f(x)\,dx\,dy = \int_{\partial D} F(x)\,dy$

② La dérivée de la forme différentielle $\omega = -F(y)\,dx$ est définie par $d\omega = f(y)\,dx \wedge dy$.

Conséquence : $\displaystyle\iint_D f(y)\,dx\,dy = -\int_{\partial D} F(y)\,dx$.

Application avec $F(x) = 1$.

2e idée

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

① La dérivée de la forme différentielle $\omega = -yf(x)\,dx$ est définie par $d\omega = f(x)\,dx \wedge dy$.

Conséquence : $\displaystyle\iint_D f(x)\,dx\,dy = \int_{\partial D} -yf(x)\,dx$

② La dérivée de la forme différentielle $\omega = xf(y)\,dy$ est définie par $d\omega = f(y)\,dx \wedge dy$.

Conséquence : $\displaystyle\iint_D f(y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} xf(y)\,dy$

Ici $\omega = xe^{y^2}\,dy$, on a alors $d\omega = e^{y^2}\,dx\,dy$.

Par conséquent, $\displaystyle I = \iint_D e^{y^2}\,dx\,dy = \int_{\partial D} x\,e^{y^2}\,dy$.

On parcourt l'arc Γ dans le sens direct.

Cet arc Γ est constitué de trois segments de droites Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Γ_1 : segment joignant le point $(-1;-1)$ au point $(0;-1)$

Γ_2 : segment joignant le point $(0;-1)$ au point $(0;0)$

Γ_3 : segment joignant le point $(0;0)$ au point $(-1;-1)$

$$\int_{\Gamma_1} x\,e^{y^2}\,dy = 0 \ (y = c^{te} = -1)\ ;\ \int_{\Gamma_2} x\,e^{y^2}\,dy = 0 \ (x = c^{te} = -1)\ ;\ \int_{\Gamma_3} x\,e^{y^2}\,dy = \int_0^1 te^{t^2}\,dt = \frac{e-1}{2}$$

4 $\displaystyle\iint_{[0;1]^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\int$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

ASTUCE

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underset{U}{\sin\theta} \times \underbrace{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}_{V'}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$U' = \cos\theta \qquad V = \frac{1}{2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}$$

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$$

5 $\displaystyle\iint_D f = \ln 2$

6 $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+1}$

$$A = -\frac{y^2}{2\left(x^2+1\right)}$$

$$\iint_{[0;1]^2} \frac{y}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma^+} \frac{y^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

avec $\gamma_1 : \begin{array}{l}[0\,;\pi] \\ t\end{array} \begin{array}{l} \\ \mapsto (\cos t\,;\sin t)\end{array}$ $\qquad \gamma_2 : \begin{array}{l}[-1\,;1] \\ t\end{array} \begin{array}{l} \\ \mapsto (t\,;0)\end{array}$

$$\int_{\gamma_1} = \frac{\pi}{2}-1 \qquad \int_{\gamma_2} = 0$$

Détail du calcul de l'intégrale curviligne sur γ_1 :

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\times(-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}\times(-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{2}{1+\cos^2 t}-1\right)\times\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{2\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\cos t\right]_0^{\pi}}_{-2}$$

$u=\cos t \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - 1$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - 1$$

$$= \left[\operatorname{Arctan} u\right]_{-1}^{1} - 1$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-1$$

$$= \frac{\pi}{2}-1$$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\iint_D f = 1$

$\boxed{8}$

1^er cas :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{y}{x^2+1}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\times\frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$$

2^e cas :

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

On utilise toujours la méthode de Fubini.

Variante possible : $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\iint_D f = \frac{1}{5}$

$\boxed{12}$

On considère des rectangles R_1, R_2, …, R_n.

Ils ont tous un côté entier $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, …, $\frac{p_n}{q_n}$.

Par une homothétie de rapport $\mathrm{PPCM}(q_1, q_2, ..., q_n)$, on se ramène à des rectangles qui ont tous un côté entier.

$$\iint_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{R_2'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \ldots + \iint_{R_n'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

$\boxed{14}$

Inégalité de Tchébytcheff

15 $\displaystyle\iint_D f(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,f(x)\ \mathrm{d}x$

16 $\displaystyle\iint_D f(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x+y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\big(F(x+1)-F(x)\big)\ \mathrm{d}x=\int_1^2 F(t)\ \mathrm{d}t-\int_0^1 F(t)\ \mathrm{d}t$

L'intégrale $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{1+x+y}$ est proposée dans le cours de l'ESILV et vaut $3\ln3-4\ln2$.

17 On sépare D en deux triangles D_1 et D_2 : D_1 triangle $x\geqslant y$ et D_2 triangle $x\leqslant y$.
On applique la relation de Chasles pour les intégrales doubles.

$$\iint_D f\big(\max(x,y)\big)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

18 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

Le résultat reste valable pour $\displaystyle\iint_D \cos(x-y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, $\displaystyle\iint_D \sin(x-y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ …

Et également, si on prend un pavé…

19 On sépare le « carré » D en deux triangles D_1 et D_2 : D_1 triangle $x\geqslant y$ et D_2 triangle $x\leqslant y$.

$$\iint_D \left|\ f(x)-f(y)\right|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\iint_{D_1}\big[f(x)-f(y)\big]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+\iint_{D_2}\big[f(y)-f(x)\big]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^x f(x)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_0^x f(y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1\big(F(x)-F(0)\big)\ \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x+F(0)$$

$$\iint_{D_2}\big[f(y)-f(x)\big]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_x^1 f(x)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\big(F(1)-F(x)\big)\ \mathrm{d}x-\int_0^1(1-x)\,f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$=F(1)-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1(1-x)\,f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$=\cancel{F(1)}-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x-\cancel{F(1)}+F(0)+\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x$$

$$=F(0)+\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\iint_D \left|\ f(x)-f(y)\right|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x+F(0)+F(0)+\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x-2\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x+2F(0)$$

$$\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 F(x)\ \mathrm{d}x$$

On en déduit que $\displaystyle\iint_D \left|\ f(x)-f(y)\right|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2F(0)+2F(1)-4\int_0^1 F(t)\ \mathrm{d}t$.

Application : On trouve $2\mathrm{e}+2-4\big[\mathrm{e}^x\big]_0^1=2\mathrm{e}+2-4(\mathrm{e}-1)=6-2\mathrm{e}$ (résultat vérifié avec le logiciel dcode).

24 Cette inégalité est à relier avec l'inégalité de Grüss.

25

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{xy}=\ln\frac{b}{a}\times\ln\frac{d}{c}$$

Le résultat est bien strictement positif.

26 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

Variantes possibles : $\displaystyle\iint_D (2x+y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$; $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$; $\displaystyle\iint_D (2x-y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

27 $\displaystyle\iint_D (x+y+1)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ avec $D=[0\,;1]^2$

Variantes possibles : $\displaystyle\iint_D (x-y+1)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$; $\displaystyle\iint_D (2x+y-1)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

28 $\dfrac{1}{12}$ (noté le 31-010-2020 sous toute réserve)

29 $\dfrac{\ln 2-1}{2}$ (noté le 31-010-2020 sous toute réserve)

33

$$\iint_D x^y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^1 x^y\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1\mathrm{d}y\ =\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{y+1}\ =\ln 2$$

Variante possible : $D=[0\,;1]\times[a\,;b]$ où a et b sont des réels tels que $-1<a<b$

34

$$\iint_D x^{u(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_0^1 x^{u(y)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\frac{x^{u(y)+1}}{u(y)+1}\right]_0^1\mathrm{d}y\ =\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{u(y)+1}$$

35

1°) $$\iint_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^y \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right]_0^y\mathrm{d}y=\int_0^1 y(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{d}y=(\mathrm{e}-1)\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

2°)

$$\iint_D u\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^1\left(\int_0^y u\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^1\left[yU\left(\frac{x}{y}\right)\right]_0^y\mathrm{d}y=\int_a^1 y\big(U(1)-U(0)\big)\,\mathrm{d}y=\left(\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\right)\frac{1-a^2}{2}$$

Autre idée : $\iint_D \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

36 On cherche P et Q telles que $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=xy$.

On peut prendre pour P la fonction nulle et pour Q la fonction définie par $Q(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y$.

37

1ère manière :

$$\iint_D x^{\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^{\alpha}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\times\left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=\dots$$

Variante possible : prendre $D=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geqslant 0\ ;\ y\geqslant 0\ ;\ 0\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$

38

On a $A=B$ et $A+B=\text{aire de }D$.

On en déduit que $A=B=\dfrac{\text{aire de }D}{2}=\dfrac{(b-a)^2}{2}$.

40 $$\iint_D \frac{\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^x\left(\int_0^x\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^x\left[\ln\left(2\mathrm{e}^x\right)-\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right]\mathrm{d}x$$

Variantes possibles :

$\iint_D \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où a est un réel strictement positif

$\iint_{I\times J} \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où I et J sont deux segments

41

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}}=\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\times\int_0^b\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{2y}+1}\,\mathrm{d}y=\left(1-\mathrm{e}^{-a}\right)\times\left[\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^b\right)-\frac{\pi}{4}\right]$$

42

On partage D grâce à la droite d'équation $x=y$ en deux triangles T (triangle inférieur) et T' (triangle supérieur).

$$\iint_D \frac{\mathrm{e}^{\min(x\,;\,y)}}{\mathrm{e}^{\max(x\,;\,y)}+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_T\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{T'}\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Variante :

$$\iint_D \frac{\min(x\,;\,y)}{\max(x\,;\,y)+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_T\frac{x}{y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{T'}\frac{y}{x+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

43

$$\begin{aligned}\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x-y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[F(x-y)\right]_0^1\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[F(x)-F(x-1)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 F(x-1)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 F(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ (intégration par parties : $u'(x)=1$, $v(x)=F(x)$, $u(x)=x$, $v'(x)=f(x)$)

44

En utilisant un changement de variable $(x\,;y)\mapsto(y\,;x)$, on démontre que

$\iint_D f(|x-y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_T f(|x-y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où T est le domaine triangulaire défini par $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant x$.

$$\iint_T f(|x-y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^x f(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[-F(x-y)\right]_0^x\mathrm{d}x=\int_0^1\left[F(x)-F(0)\right]\mathrm{d}x$$

45 $\dfrac{8\pi}{15}$

$\boxed{46}$ $\dfrac{32}{15}$

$\boxed{53}$ $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=\frac{1}{2}\iint_{[0;1]^2}\frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=\frac{\pi^2}{32}$

$\boxed{54}$ $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}} y\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\boxed{55}$ $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\left[\cos\left(\mathrm{e}^x\right)\cos\left(\mathrm{e}^y\right)-\sin\left(\mathrm{e}^x\right)\sin\left(\mathrm{e}^y\right)\right]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

$=\left(\sin\left(\mathrm{e}^b\right)-\sin\left(\mathrm{e}^a\right)\right)\left(\sin\left(\mathrm{e}^d\right)-\sin\left(\mathrm{e}^c\right)\right)+\left(\cos\left(\mathrm{e}^b\right)-\cos\left(\mathrm{e}^a\right)\right)\left(\cos\left(\mathrm{e}^d\right)-\cos\left(\mathrm{e}^c\right)\right)$

exercice $\boxed{55}$ noté le 25-4-2022

Exercices supplémentaires

$\boxed{1}$ 1°) Calculer l'aire d'une arche de la cycloïde $\mathcal{C}$ définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t)=a(t-\sin t) \\ y(t)=a(1-\cos t) \end{cases}$ ($a>0$) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2°) Calculer la longueur d'une arche de cycloïde.

3°) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{C}$ de l'axe des abscisses.

Résultats :

1°) $\mathcal{A}=3\pi a^2$; 2°) $\mathrm{L}=8a$; 3°) $\mathrm{V}'=5\pi^2 a^3$

$\boxed{2}$ Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $I=\mathbb{R}_+$ et calculer son intégrale.

Indication : Calculer l'intégrale double de f sur $D=\left\{(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$ et $D'=\left\{(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 2a^2\right\}$ puis considérer l'intégrale double de f sur $D''=[0\,;\,a]\times[0\,;\,a]$.