Formes différentielles
Intégrales curvilignes

$\boxed{1}$ Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ le long d'une courbe paramétrée γ d'extrémités A(2 ; 3) et B(0 ; 1) parcourue de A vers B.

$\boxed{2}$ Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{F}: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(x^2+2xy,\ 2xy-y^2\right) \end{array}$ le long du demi-cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 1, d'extrémités A(1 ; 0) et B(– 1 ; 0) parcouru dans le sens trigonométrique.

$\boxed{3}$ Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \left(2y^3x+3xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(3y^2x^2+3yx^2\right)\mathrm{d}y$ où Γ est un arc de classe C^1 d'extrémités A(2 ; 0) et B(1 ; 1) parcouru dans le sens trigonométrique.

$\boxed{4}$ On considère le champ de vecteurs $\vec{X}: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(xy-x^2,\ zx-y^2,\ xy-z^2\right) \end{array}$.

Ce champ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?
Si oui, déterminer le potentiel correspondant.

$\boxed{5}$ Calculer $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{ACB}} y^2\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$ où $\overset{\frown}{\mathrm{ACB}}$ est le circuit tel que A(– 1 ; 0), C(0 ; 1), B(1 ; 0) constitué du segment [AC] et de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ de la parabole d'équation $y=1-x^2$.

$\boxed{6}$ Calculer la circulation (ou le travail) du champ de vecteurs $\vec{X}: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(-y^2,\ xy\right) \end{array}$ sur le contour orienté positivement du domaine borné délimité par la parabole d'équation $y=2-x^2$ et la droite d'équation $y = x$.

$\boxed{7}$ On considère les formes différentielles du premier degré $\omega_1=\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\omega_2=\dfrac{\omega_1}{x^2}$ définie $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

1°) Dire si ces formes différentielles sont exactes.
2°) Si oui, déterminer une primitive.

$\boxed{8}$ Calculer $\displaystyle\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y$ où Γ est la courbe de $\mathbb{R}^2$ et d'équation $x^2+y^2-y=0$.

$\boxed{9}$ On pose $\omega = (x - y^2)\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$.

Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ où Γ est le demi-cercle de diamètre [AB] situé dans le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses avec A(– 1 ; 0) et B(1 ; 0) orienté positivement de A vers B.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Définition de l'intégrale curviligne d'une forme différentielle de degré 1 (indépendance par rapport au paramétrage).

$\boxed{2}$ Circulation d'un champ de vecteurs.

$\boxed{3}$ Divergence d'un champ de vecteurs ; champ conservatif (lien entre les deux).

$\boxed{4}$ Dérivée d'une forme différentielle
1-forme ; 2-forme

$\boxed{5}$ Démontrer que l'aire d'un domaine D est donnée par la formule : $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma \underbrace{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}_{\omega}$ où Γ est le bord orienté du domaine D.

$\boxed{6}$ Donner la définition d'une forme différentielle exacte et d'une forme différentielle fermée.
Donner des exemples. Lien entre les deux notions. Citer le lemme de Poincaré.

Corrigé

$\boxed{1}$ – 6

$\boxed{2}$ $\mathcal{C}_\Gamma\left(\vec{F}\right)=\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{3}$ $f(x, y)=x^2y^3+\dfrac{3}{2}x^2y^2$; $\displaystyle\int_\Gamma \omega=\frac{5}{2}$

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{X}=\vec{0}$ avec $\vec{X}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V$ avec $V(x, y, z)=xyz-\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}+c$

$\boxed{5}$ $I=I_1+I_2$; $I_1=-\dfrac{1}{6}$; $I_2=-\dfrac{2}{15}$; $I=-\dfrac{3}{10}$

$\boxed{6}$ $\gamma_1: t\mapsto\left(t,\ 2-t^2\right)$ et $\gamma_2: t\mapsto(t, t)$

$C_{\gamma_1}\left(\vec{X}\right)=\displaystyle\int_1^{-2}\left(t^4-4\right)\mathrm{d}t=\frac{27}{5}$ et $C_{\gamma_2}\left(\vec{X}\right)=0$

$\boxed{7}$ Pour ω_2, $f(x, y)=x+\dfrac{y}{x}$.

$\boxed{8}$ Formule de Green-Riemann plus simple : $-\dfrac{\pi}{16}$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_\Gamma \omega=\int_0^\pi\left(-\sin t\cos t+\sin^3 t+\cos^4 t\right)\mathrm{d}t=\ldots=\frac{4}{3}+\frac{3\pi}{8}$