Exercices sur l'étude métrique des courbes planes

$\boxed{1}$ Tracer et calculer la longueur de la courbe plane d'équation polaire $\rho(\theta)=\sqrt{1-4\theta^2}$.

$\boxed{2}$ Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit (I, f) une courbe plane paramétrée régulière de classe C^1 dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note φ une mesure en radians de l'angle formé par la tangente en un point M et l'axe des abscisses ($\varphi=\left(\vec{i}\,;\vec{T}\right)$ où $\vec{T}$ est le vecteur tangent au point M).

Démontrer que l'on a : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\varphi$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\varphi$.

2°) On note R le rayon de courbure et s l'abscisse curviligne du point correspondant.
On suppose que $R=\alpha s$ où α est un réel strictement positif fixé.

a) Déterminer s.

b) Poser $z=x+\mathrm{i}y$.

Calculer $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$ en fonction de φ.

c) En déduire la nature de la courbe.

$\boxed{3}$ Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que la courbe Γ_1 d'équation $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ et la courbe Γ_2 d'équation polaire $r=a\sin(2\theta)$ ont la même longueur ($a>0$ fixé).

$\boxed{4}$ Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & P \\ t & \longmapsto & \mathrm{M}\,(\mathrm{sh}\,t\cos t+\mathrm{ch}\,t\sin t,\ \mathrm{sh}\,t\sin t-\mathrm{ch}\,t\cos t) \end{array}$$

On note $\mathcal{C}$ son support, $\mathcal{C}_1$ la développée de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2$ la développée de $\mathcal{C}_1$ etc.

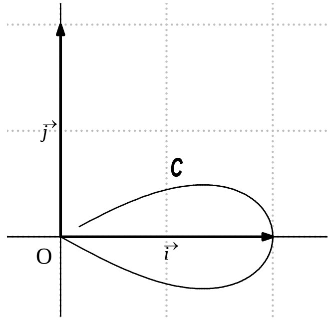
1°) Déterminer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Que peut-on dire de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}$?

2°) Que peut-on dire de $\mathcal{C}_4$?

Réponses

$\boxed{1}$ Un élève m'a fait l'excellente remarque suivante concernant la longueur de la courbe $\mathcal{C}$.

La longueur de $\mathcal{C}$ est supérieure au double de la longueur OA où A est le point de coordonnées (1, 0) c'est-à-dire à 2. On vérifie que c'est vrai après calcul.



$$L=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+4\theta}{\sqrt{1-4\theta^2}}\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos^2 u}{2}\,\mathrm{d}u=2\times\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$$

$\boxed{4}$ $f\,'(t)=2\,\mathrm{ch}\,t\ \vec{e_t}$ $\qquad R=\mathrm{ch}\,t$

$\mathcal{C}_2 = S_O\,(\mathcal{C})$
$\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}$ (développée d'une symétrique = développée de la symétrique)

Solution détaillée :

$$f\,'(t)=\left(\mathrm{ch}\,t\cos t-\cancel{\mathrm{sh}\,t\sin t}+\cancel{\mathrm{sh}\,t\sin t}+\mathrm{ch}\,t\cos t,\ \cancel{\mathrm{sh}\,t\cos t}+\mathrm{ch}\,t\sin t-\cancel{\mathrm{sh}\,t\cos t}+\mathrm{ch}\,t\sin t\right)$$

$$f\,'(t)=\left(2\mathrm{ch}\,t\cos t,\ 2\mathrm{ch}\,t\sin t\right)$$

$$f\,'(t)=2\mathrm{ch}\,t\ \vec{e_t}$$

$$f\,''(t)=2\mathrm{sh}\,t\ \vec{e_t}+2\mathrm{ch}\,t\ \overrightarrow{e_{t+\frac{\pi}{2}}}$$

$$\gamma_0=\frac{\det\left(f\,'(t),\ f\,''(t)\right)}{\left\|f\,'(t)\right\|^3}$$

$$\gamma_0=\frac{4\,\mathrm{ch}^2 t}{8\,\mathrm{ch}^3 t}=\frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,t}$$

$$R_0=2\,\mathrm{ch}\,t$$

Par définition, $\mathcal{C}_1$ est le support de f_1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & P \\ t & \longmapsto & f(t) + R_0\ \overrightarrow{N_0} \end{array}$$

Or $\overrightarrow{N_0} = \overrightarrow{e_{t+\frac{\pi}{2}}} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left(\text{sh } t \cos t + \text{ch } t \sin t - 2\text{ch } t \sin t,\ \text{sh } t \sin t - \text{ch } t \cos t + 2\text{ch } t \cos t\right) \\ &= \left(\text{sh } t \cos t - \text{ch } t \sin t,\ \text{sh } t \sin t + \text{ch } t \cos t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= \left(\cancel{\text{ch } t \cos t} - \text{sh } t \sin t - \cancel{\text{ch } t \cos t} - \text{sh } t \sin t,\ \cancel{\text{ch } t \sin t} + \text{sh } t \cos t + \text{sh } t \cos t - \cancel{\text{ch } t \sin t}\ 2\text{ch } t\right) \\ &= \left(-2\text{sh } t \sin t,\ 2\text{sh } t \cos t\right) \\ &= 2\text{sh } t\ \overrightarrow{e_{t+\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$

$$f_1''(t) = 2\text{ch } t\ \overrightarrow{e_{t+\frac{\pi}{2}}} + 2\text{sh } t\ \overrightarrow{e_{t+\pi}}$$

$$\gamma_1 = \frac{\det\left(f_1'(t),\ f_1''(t)\right)}{\| f_1'(t) \|^3}$$

$$\gamma_1 = \frac{4\ \text{sh}^2 t}{8\ |\text{sh}^3 t|} = \frac{1}{2\ |\text{sh } t|}$$ (il faut distinguer deux cas : $t > 0$ et $t < 0$)

$$R_1 = 2\ \text{sh } t$$

Par définition, $\mathcal{C}_2$ est le support de f_2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & P \\ t & \longmapsto & f_1(t) + R_1\ \overrightarrow{N_1} \end{array}$$

Or $\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{e_{t+\pi}} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \left(\text{sh } t \cos t - \text{ch } t \sin t - 2\text{sh } t \cos t,\ \text{sh } t \sin t + \text{ch } t \cos t - 2\text{sh } t \sin t\right) \\ &= \left(-\text{sh } t \cos t - \text{ch } t \sin t,\ \text{ch } t \cos t - \text{sh } t \sin t\right) \end{aligned}$$

La courbe $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}$ dans la symétrie par rapport à l'origine du repère.
Il est alors bien évident que $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}$.

Questions de cours

1 Démontrer que le rayon de courbure est donnée par la formule $R = \lim \dfrac{X^2}{2Y}$ où X et Y sont les coordonnées dans le repère de Frenet.

2 Théorème de relèvement pour une courbe paramétrée de classe C^k où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

3 Paramétrisation normale d'une courbe paramétrée.

4 Définition de la courbure par une paramétrisation normale.

5 Définition du centre de courbure et du cercle osculateur en un point.

6 Abscisse curviligne.