1ère S

Equations et inéquations trigonométriques avec des cosinus et des sinus (2)

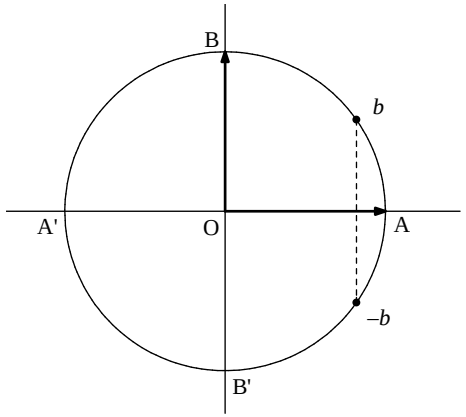
Objectifs du chapitre :

- étudier la résolution trigonométriques dans $\mathbb{R}$ (et non plus dans un intervalle borné comme on l'a déjà vu)
- étudier la résolution d'inéquations trigonométriques nécessitant un changement d'inconnue

I. Règles fondamentales

1°) Egalité de deux cosinus

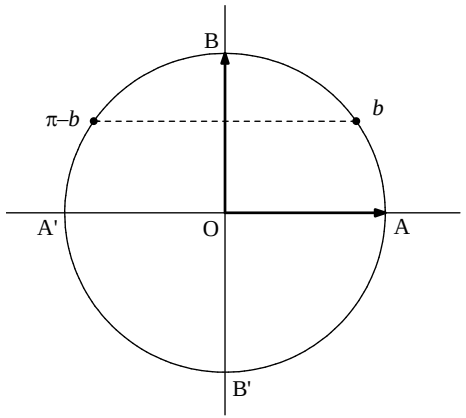
a et *b* sont deux réels.



cos *a* = cos *b* si et seulement si	$a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ **ou** $a = -b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$

2°) Egalité de deux sinus

a et *b* sont deux réels.



sin *a* = sin *b* si et seulement si	$a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ **ou** $a = \pi - b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$

II. Exemples de résolutions d'équations trigonométriques

1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ (1).

Astuce de départ :

$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

Réécriture de l'équation

(1) s'écrit $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ (« on équilibre l'équation »)

$\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$ (on « enlève » les cos avec la règle 1)

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$$

2°) Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\underbrace{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{ne pas développer}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2).

Astuce de départ :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

Réécriture de l'équation

(2) s'écrit $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{5\pi}{12}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S_2=\left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

3°) Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x=\sin x$ (3).

Astuce de départ :

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Réécriture de l'équation

(3) s'écrit $\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$(3) \Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

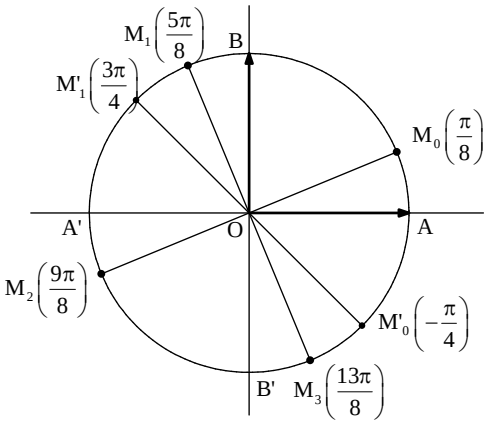
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x=-\frac{\pi}{2}+x+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{-\frac{\pi}{2}+2k'\pi}{2} \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S_3=\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$



1ère famille (points rouges)	**2e famille (points verts)**
$k=0 : \frac{\pi}{8}$	$k'=0 : -\frac{\pi}{4}$
$k=1 : \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}$	$k'=1 : -\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$
$k=2 : \frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$	
$k=3 : \frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}=\frac{13\pi}{8}$	

III. Equations trigonométriques particulières

1°) Règles

Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

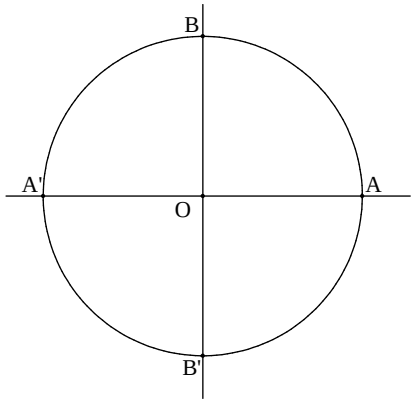
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2°) Justification

Donner 6 cercles trigonométriques.

● Equation $\cos x = 1$

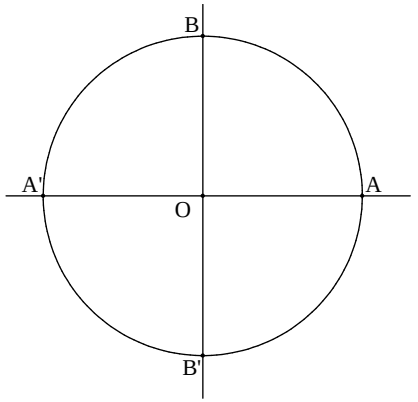
Les solutions ont pour point image A.



Les solutions sont les nombres 0, 2π, 4π, -2π, -4π ...
Il s'agit des nombres de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

● Equation $\cos x = -1$

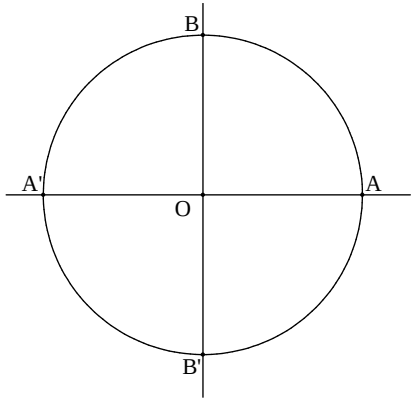
Les solutions ont pour point image A'.



Les solutions sont les nombres π, 3π, $-\pi$, -3π ...
Il s'agit des nombres de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

● Equation $\cos x = 0$

Les solutions ont pour points images B et B'.

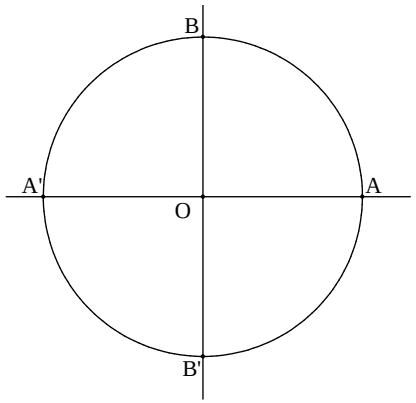


Les solutions sont les nombres $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

● Equation $\sin x = 1$

Les solutions ont pour point image B.

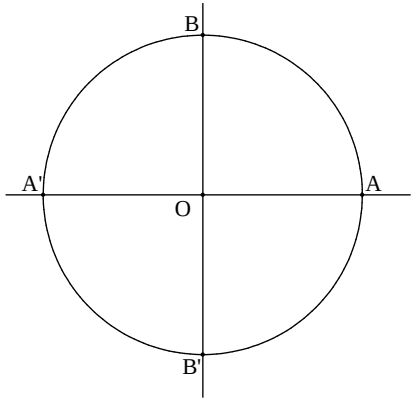


Les solutions sont les nombres $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

● Equation $\sin x = -1$

Les solutions ont pour point image B'.

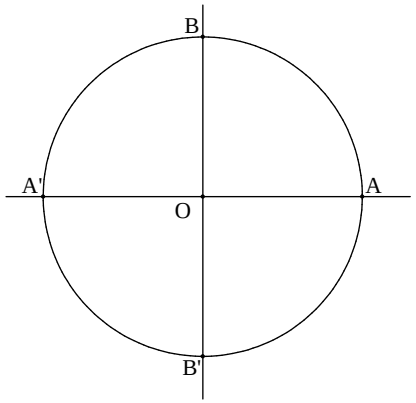


Les solutions sont les nombres $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi, -\frac{\pi}{2} + 4\pi, -\frac{\pi}{2} - 2\pi, -\frac{\pi}{2} - 4\pi$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

● Equation $\sin x = 0$

Les solutions ont pour points images A et A'.



Les solutions sont les nombres 0, π, 2π, 3π, 4π, $-\pi$, -2π, -3π, -4π ...
Il s'agit des nombres de la forme $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

IV. Résolution d'une équation trigonométrique dans un intervalle donné (exemple)

Résoudre dans [0 ; 4π] l'équation $\cos 2x = \frac{1}{2}$ (1).

1ère étape :

On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

Astuce de départ :

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

2e étape :

On cherche les solutions dans [0 ; 4π]

1ère famille : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	**2e famille :** $x = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$
On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que :	On cherche $k' \in \mathbb{Z}$ tel que :
$0 \le \frac{\pi}{6} + k\pi \le 4\pi$	$0 \le -\frac{\pi}{6} + k'\pi \le 4\pi$
$: \pi \ (\pi > 0)$	$: \pi \ (\pi > 0)$
$0 \le \frac{1}{6} + k \le 4$	$0 \le -\frac{1}{6} + k' \le 4$
$+\left(-\frac{1}{6}\right)$	$+\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{6} \le k \le \frac{23}{6}$	$\frac{1}{6} \le k' \le \frac{25}{6}$
$-\frac{1}{6} = -0{,}166...$	$\frac{1}{6} = 0{,}166...$
$\frac{23}{6} = 3{,}833...$	$\frac{25}{6} = 4{,}1666...$
$k \in \mathbb{Z}$	$k' \in \mathbb{Z}$
Donc	Donc
$k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$	$k' = 1$ ou $k' = 2$ ou $k' = 3$ ou $k' = 4$

1ère famille :	**2e famille :**
Pour $k = 0$, $x = \frac{\pi}{6} + 0\pi = \frac{\pi}{6}$	Pour $k' = 1$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$
Pour $k = 1$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$	Pour $k' = 2$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$
Pour $k = 2$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$	Pour $k' = 3$, $x = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{17\pi}{6}$
Pour $k = 3$, $x = \frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{19\pi}{6}$	Pour $k' = 4$, $x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$

On donne l'ensemble des solutions dans [0 ; 4π].

$$S_{[0;4\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}\right\}$$

V. Inéquations trigonométriques

1°) Remarques préliminaires

- Il n'y a pas de règle.
- On utilise le cercle trigonométrique.

2°) Exemple

Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$.

1ère étape :

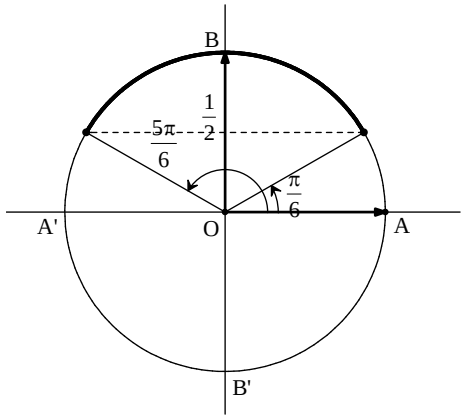
On pose : $X = 2x$.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$-\pi \leq 2x \leq \pi$ $\times 2$ $(2>0)$

$-\pi \leq X \leq \pi$

Donc $\begin{cases} \sin X \geq \frac{1}{2} \\ X \in [-\pi\,;\pi] \end{cases}$



D'après le cercle trigonométrique :

$\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{5\pi}{6}$

2e étape :

Or $X = 2x$

Donc $\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$ $: 2$ $(2>0)$

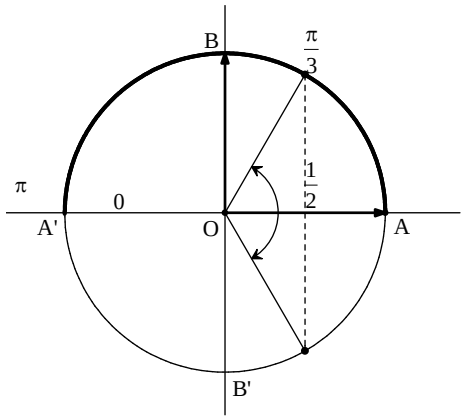
$\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$

$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]}$

VI. Utilisation de la calculatrice

1°) Pour les cosinus

$\cos x = \frac{1}{2}$



Calculatrice

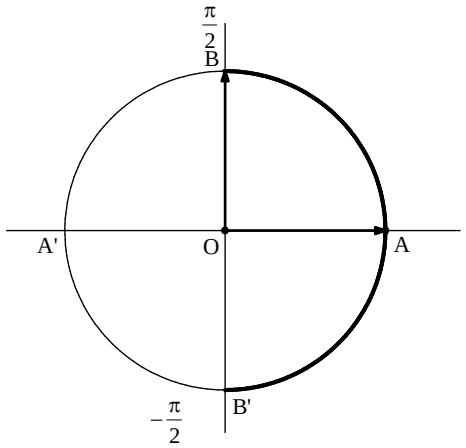
Mode radians :

2nd cos 0,5 = 1,04719…

$\frac{\pi}{3}$

La calculatrice donne une valeur dans l'intervalle [0 ; π].

2°) Pour les sinus



La calculatrice donne une valeur dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

VII. <u>Point méthode pour la résolution d'une équation trigonométrique dans $\mathbb{R}$</u>

On regarde :

- s'il y a un cosinus dans un membre (et un seulement) : on essaie de transformer pour avoir deux cosinus

- s'il y a un sinus dans un membre (et un seulement) : on essaie de transformer pour avoir deux sinus

- s'il y a un cosinus dans un membre et un cosinus dans l'autre, on transforme le cosinus en sinus ou le contraire pour avoir soit une égalité de deux cosinus soit une égalité de deux sinus

Technique particulière : changement d'inconnue $X = \cos x$ ou $X = \sin x$.

Il faut avoir des cosinus ou des sinus « purs » (pas de cosinus avec des carrés, des cubes…)