TS3

Contrôle du vendredi 8 avril 2011 (45 minutes)

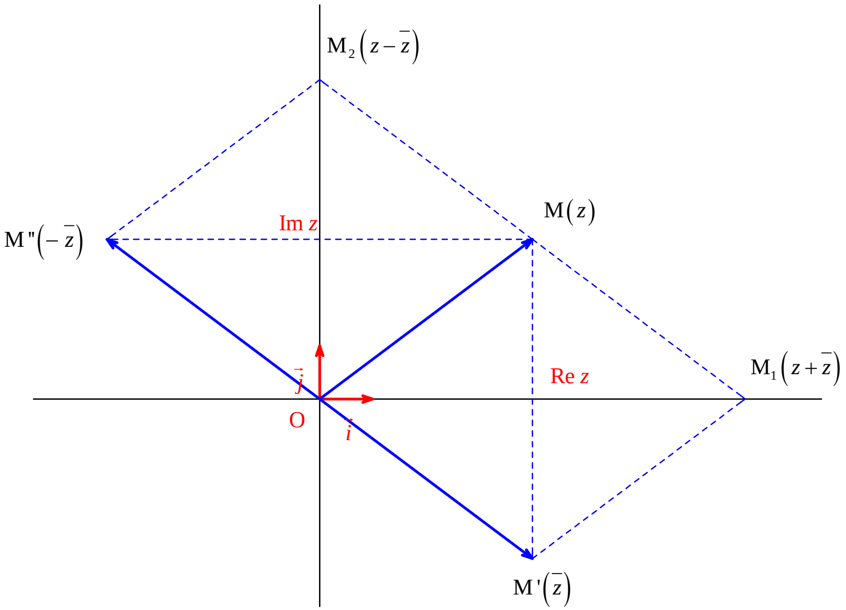
Écrire très lisiblement au stylo et sans ratures.
Ne rien écrire et ne rien surligner sur cette feuille en dehors de ce qui est demandé (même au crayon à papier).

Prénom : …………………………….. **Nom :** ……………………………. **Note : ………. / 20**

I. (4 points) Questions de cours

1°) Soit z un nombre complexe quelconque. Rappeler les expressions de Re z et de Im z en fonction de z et de $\bar{z}$, illustrées par le graphique ci-dessous où M, M', M" les points d'affixes respectives z, $\bar{z}$, $-\bar{z}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

$\mathrm{Re}\, z =$ ……………………………	$\mathrm{Im}\, z =$ ……………………………



2°) Soit z un nombre complexe de module r. Compléter en fonction de r.

$\left\lvert \dfrac{1}{z} \right\rvert =$ …… (on suppose que $z \neq 0$)	$\left\lvert \bar{z} \right\rvert =$ ……

II. (2 points) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

Donner le résultat sans détailler les calculs.

$z =$ …………………….. (un seul résultat)

III. (2 points) Soit z le nombre complexe de module 4 et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$.

Donner la forme exponentielle puis algébrique de z. Écrire un seul résultat à chaque fois.

Forme exponentielle de z : …………………………………
Forme algébrique de z : …………………………………

IV. (3 points) Déterminer l'ensemble E des points M du plan complexe P dont l'affixe z vérifie $\left\lvert 3+\mathrm{i}-z \right\rvert = 5$.

On rédigera la recherche en utilisant des équivalences et on conclura clairement : « L'ensemble E est …. ».

…….

…….

…….

…….

…….

V. (4 points) On pose $a = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$ et $b = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$.

On note A et B les points images de a et b dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

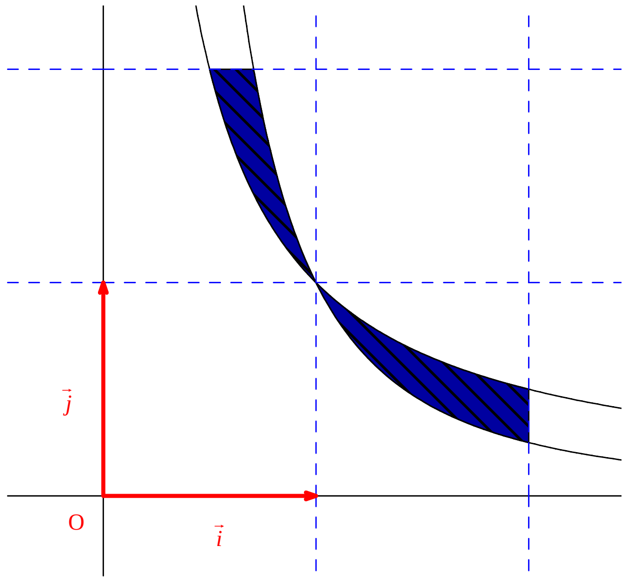
………

………

………

………

VI. (3 points) On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Le but de cet exercice est de comparer les aires des deux parties hachurées.

1°) Calculer l'aire de la partie de droite. Donner la valeur exacte.

2°) On admet que l'aire de la partie de gauche est obtenue en calculant $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ (admettre le résultat sans se poser de question, en particulier sur les bornes qui peuvent sembler curieuses).
Calculer cette aire (valeur exacte) et conclure.

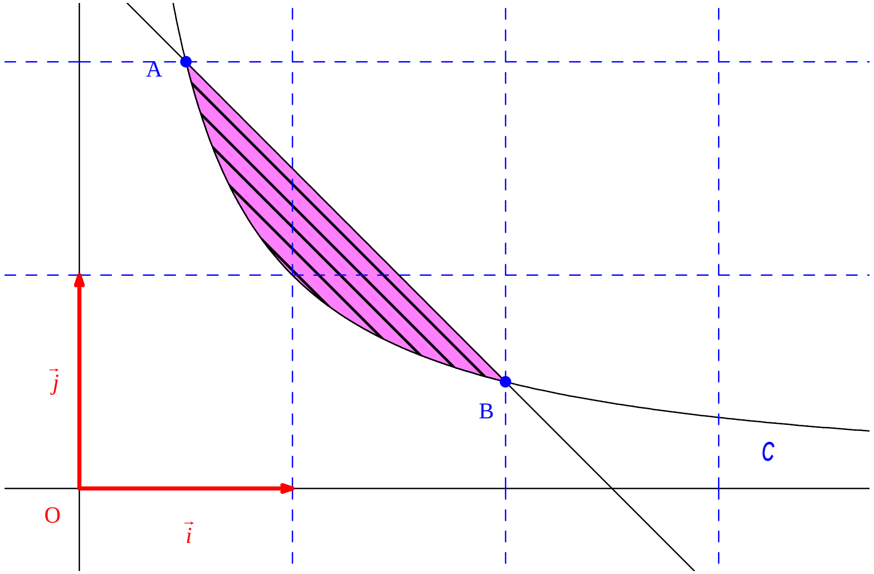
Donner les résultats sans détailler les calculs.

1°) L'aire de la partie de droite est égale à ………………………… (unités d'aires).
2°) L'aire de la partie de gauche est égale à ………………………… (unités d'aires). **Conclusion :** ……………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………………………

VII. (2 points) On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $\dfrac{1}{2}$ et 2.

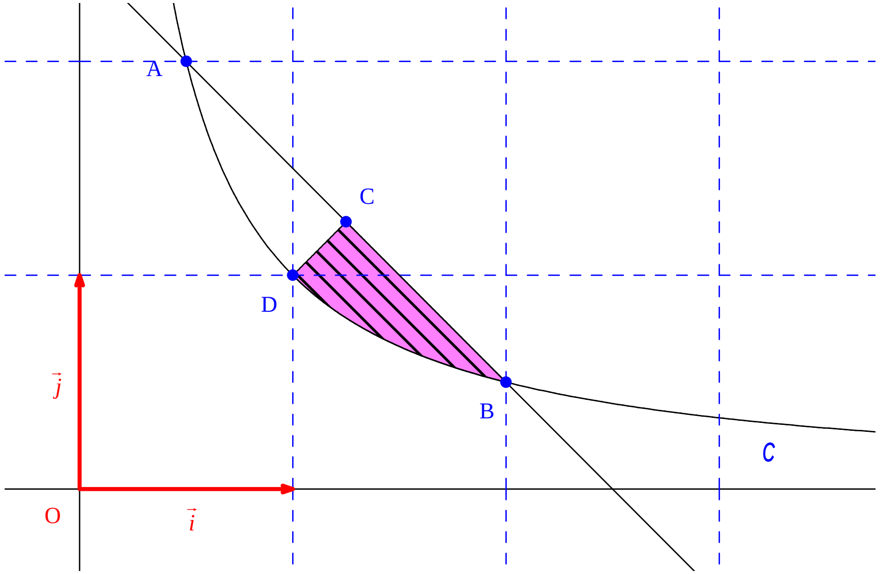
1°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous (domaine limité par $\mathcal{C}$ et la droite (AB)).
Donner la valeur exacte du résultat sous la forme la plus simple possible.

On pourra utiliser directement, sans faire le calcul, le fait que (AB) a pour équation réduite $y=-x+\dfrac{5}{2}$.



$\mathcal{A}$ = ……………………………………………………… unités d'aire (écrire un seul résultat)

2°) En déduire l'aire $\mathcal{A}'$ (valeur exacte) du domaine hachuré sur la figure ci-dessous où C et D désignent les points de coordonnées respectives $\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$ et $(1;1)$.



$\mathcal{A}'$ = ……………………………………………………… unités d'aire (écrire un seul résultat)

Corrigé du contrôle du 8-4-2011

I. Questions de cours

1°)

$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$	$\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ *

Dans la deuxième expression, on pourrait essayer d'enlever le i qui figure au dénominateur mais ce n'est pas très utile (et ce n'est pas comme ça que l'on apprend cette formule).

2°)

$\left\lvert \dfrac{1}{z} \right\rvert = \dfrac{1}{r}$	$\lvert \overline{z} \rvert = r$

II. $z = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$

$$z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

III. z : nombre complexe de module 4 et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$

Forme exponentielle de z :	$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
Forme algébrique de z :	$4\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

IV.

Déterminons l'ensemble E des points M du plan complexe P dont l'affixe z vérifie $\lvert 3+\mathrm{i}-z \rvert = 5$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \lvert 3+\mathrm{i}-z \rvert = 5 \\
&\Leftrightarrow \lvert z_\Omega - z \rvert = 5 \text{ avec } \Omega(3+\mathrm{i}) \\
&\Leftrightarrow \lvert z_{\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}} \rvert = 5 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{M}\Omega = 5 \\
&\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M} = 5
\end{aligned}$$

L'ensemble E est le cercle de centre $\Omega(3+\mathrm{i})$ et de rayon 5.

V.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$:

A a pour affixe $a = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$;
B a pour affixe $b = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$.

$\mathrm{A}\left(4\sqrt{3}+4\mathrm{i}\right)$ $\quad$ $\mathrm{B}\left(4\sqrt{3}-4\mathrm{i}\right)$ $\quad$ $\mathrm{O}(0)$

Démontrons que le triangle OAB est équilatéral.

Méthode : on calcule les distances OA, OB et AB.

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= \lvert z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} \rvert \\
&= \left\lvert 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} + \left(4\sqrt{3}+4\mathrm{i}\right) \right\rvert \\
&= \lvert -8\mathrm{i} \rvert \\
&= \lvert 8\mathrm{i} \rvert \\
&= \lvert 8 \rvert \times \lvert \mathrm{i} \rvert \\
&= 8 \times 1 \quad *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{OA} &= \lvert z_\mathrm{A} - z_\mathrm{O} \rvert \quad ** \\
&= \lvert z_\mathrm{A} - 0 \rvert \\
&= \lvert z_\mathrm{A} \rvert \\
&= \lvert 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i} \rvert \\
&= \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{48+16} \\
&= \sqrt{64} \\
&= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{OB} &= \lvert z_\mathrm{B} - z_\mathrm{O} \rvert \\
&= \lvert z_\mathrm{B} - 0 \rvert \\
&= \lvert z_\mathrm{B} \rvert \\
&= \lvert \overline{z_\mathrm{A}} \rvert \; ** \\
&= \lvert z_\mathrm{A} \rvert \\
&= 8
\end{aligned}$$

* Le module de i est égal à 1 (il est inutile de refaire le calcul ; c'est un résultat de cours qui doit être su).

** Les trois premières lignes sont tout à fait inutile ; si l'on connaît bien le cours, on doit savoir que si M est un point quelconque du plan complexe d'affixe z, alors la distance OM du point M à l'origine O du repère est égale au module de z : $\mathrm{OM} = \lvert z \rvert$.

*** On observe directement que les nombres a et b sont conjugués ; une propriété du cours (très simple à démontrer) dit que deux nombres complexes conjugués ont le même module.

Donc on en déduit que $AB = OA = OB$.
On en conclut que le triangle OAB est équilatéral.

VI. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

1°) L'aire de la partie de droite est égale à $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$ (unités d'aires).

2°) L'aire de la partie de gauche est égale à $2\sqrt{2} - \ln 2 - 2$ (unités d'aires).

Conclusion :

Avec la calculatrice, on trouve $\mathcal{A} = 0{,}19314180\ldots$ et $\mathcal{A}' = 0{,}135279944\ldots$
On a donc $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$.
L'aire de la partie de droite a une aire plus grande que celle de la partie de gauche.

Détail :

1°) Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont continues sur leurs ensembles de définition.

La courbe représentative de la fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est au-dessus de celle de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur l'intervalle [1 ; 2].

Par conséquent, l'aire de la partie de droite est obtenue en calculant $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\ln 1 + \frac{1}{1}\right) = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

2°) L'aire de la partie de gauche est obtenue en calculant $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

$$\mathrm{J} = \left[2\sqrt{x} - \ln x\right]_1^2 = \left(2\sqrt{2} - \ln 2\right) - \left(2\sqrt{1} - \ln 1\right) = 2\sqrt{2} - \ln 2 - 2$$

VII.

1°) L'aire $\mathcal{A}$ est donnée par l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \ldots = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

Détail du calcul :

En notant F la primitive, on a :

$$F(2) = \frac{5}{2} \times 2 - \frac{2^2}{2} - \ln 2 = 5 - 2 - \ln 2 = 3 - \ln 2$$
$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \ln\frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{8} + \ln 2 = \frac{9}{8} + \ln 2$$

$$F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{9}{8} - 2\ln 2 = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{15}{8} - 2\ln 2 \text{ unités d'aire}}$$

2°) L'aire $\mathcal{A}'$ est égale à la moitié de l'aire $\mathcal{A}$ car le domaine considéré à la question 1°) est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

$$\boxed{\mathcal{A}' = \frac{15}{16} - \ln 2 \text{ unités d'aire}}$$