1ère L Option

Arithmétique (3)
Critères de divisibilité
Nombres premiers

I. Critères de divisibilité

Les critères de divisibilité permettent de savoir, sans faire la division, si un nombre est divisible par un autre. C'est pratique !

Critère de divisibilité par 2

Un nombre est divisible par 2 s'il est pair, c'est-à-dire s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Critère de divisibilité par 4

Un nombre entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres (celui des dizaines et celui des unités) est divisible par 4.

Critère de divisibilité par 5

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Critère de divisibilité par 6

Un nombre entier est divisible par 6 lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.

Critère de divisibilité par 9

Un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme des chiffres qui composent son écriture est divisible par 9.

Critère de divisibilité par 10

Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par un 0.

Critère de divisibilité par 11

Un nombre entier est divisible par 11 si la différence des chiffres de rang pair et des chiffres de rang impair de son écriture est divisible par 11.

II. Nombres premiers

1°) Définition

On dit qu'un entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

2°) Exemples

2 possède exactement deux diviseurs, 1 et 2, donc 2 est un nombre premier.
De même 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.

3°) Contre-exemples

1 a un seul diviseur (1) donc 1 n'est pas un nombre premier.
12 admet plus de deux diviseurs donc 12 n'est pas un nombre premier.
0 a une infinité de diviseurs donc 0 n'est pas premier.

4°) Un algorithme de recherche des nombres premiers : le crible d'Eratosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eratosthène était un mathématicien, astronome géographe et poète grec né en 284 avant J.-C..
Il est le premier à avoir déterminer de façon précise le périmètre de la Terre et à avoir mis au point un moyen pour déterminer les nombres premiers inférieurs à un entier donné.

Explications de l'algorithme :

- 1 n'est pas un nombre premier donc on le raye.
- 2 est un nombre premier : on l'entoure (choisir un code de couleur). Les multiples de 2 admettant au moins pour diviseur 1 ; 2 et eux-mêmes possèdent plus de deux diviseurs donc ne sont pas premiers.
  Par exemple 4 est un multiple de 2. 4 admet pour diviseurs 1, 2 et 4 donc 4 n'est pas premier.
  On raye de la liste tous les nombres multiples de 2.
- 3 est un nombre premier : on l'entoure. Pour des raisons analogues à celles qui précèdent, tous les multiples de 3 ne sont pas premiers. On raye de la liste tous les nombres multiples de 3.
- On recommence avec le nombre premier suivant c'est à dire 5…

Liste des entiers naturels premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

5°) Propriété (admise sans démonstration)

Il y a une infinité de nombres premiers.

6°) Comment déterminer si un nombre est premier

Pour déterminer si un nombre *N* est premier, on effectue la division de ce nombre par les nombres premiers successifs 2, 3, 5… Si *N* n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers, on reconnaîtra qu'il est premier dès que le quotient sera inférieur au diviseur.
On appelle cette méthode : **« test d'arrêt ».**

III. Décomposition en produit de facteurs premiers

1°) Théorème (admis)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

2°) Méthode pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

On effectue des divisions euclidiennes successives des quotients par les diviseurs premiers (2, 3, 5…) tant que le quotient est différent de 1.

● Décomposer 168 en produit de facteurs premiers :

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

La décomposition de 168 en produit de facteurs premiers est $168=2^3\times3\times7$.

● Décomposer en produit de facteurs premiers 45 :

45	3
15	3
5	5
1	

La décomposition en produit de facteurs premiers de 45 est : $45=3^2\times5$.

3°) Remarque

La décomposition en produit de facteurs premiers est unique à l'ordre des facteurs près.

4°) Applications de la décomposition en produit de facteurs premiers

- Donner la liste des diviseurs d'un nombre
- Déterminer le PGCD et le PPCM de deux nombres
- Ecrire une fraction sous forme irréductible

IV. Liste des diviseurs d'un entier

1°) Méthode

- On utilise la décomposition en facteurs premiers.
- On utilise un arbre de possibilités.

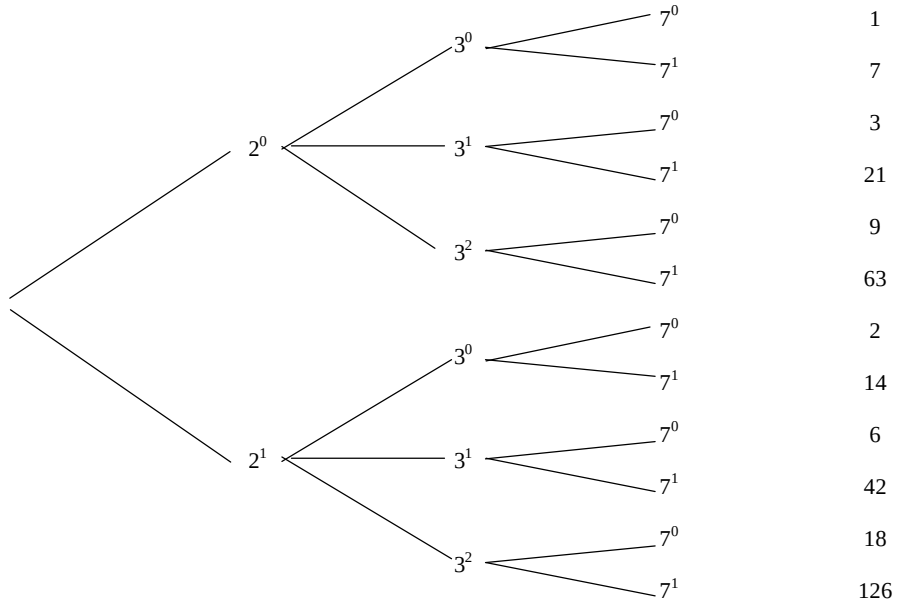
2°) Exemple

Donner la liste des diviseurs de 126.

Pour cela, on effectue la décomposition de 126 en produit de facteurs premiers.

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

La décomposition de 126 en produit de facteurs premiers est : $126 = 2\times3^2\times7$.
Tous les diviseurs de 126 vont s'écrire sous la forme : $2^n\times3^p\times7^q$ avec $0\le n\le1$, $0\le p\le2$, et $0\le q\le1$.
Pour déterminer tous ces diviseurs, on fait un arbre de possibilités :



Conclusion : 126 admet 11 diviseurs qui sont : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126.

Il y a 8 diviseurs.

3°) Nombre de diviseurs d'un entier

On détermine la décomposition en facteurs premiers puis on esquisse un arbre afin de déterminer le nombre de possibilités.

V. PGCD et PPCM de deux entiers

1°) Rappels (déjà dit dans le chapitre précédent)

● **PGCD de deux entiers : plus grand commun diviseur.**

● **PPCM de deux entiers : plus petit commun multiple non nul.**

Déjà dit dans le chapitre précédent

● **Exemple :**

Regardons les multiples de 6 et de 4.

Les multiples de 6 sont 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36…
Les multiples de 4 sont 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24…

Les nombres 4 et 6 ont des multiples en commun : 0, 12, 24…

Le plus petit commun multiple commun non nul est 12.

On écrit PPCM(4 ; 6) = 12.

● **Utilisation :** calculs de sommes ou de différences de fractions.

● **Détermination du PPCM de deux entiers naturels**

● Il n'y a pas d'algorithme comme l'algorithme d'Euclide pour le PGCD.

2°) Méthodes à l'aide des nombres premiers

On décompose les deux nombres en produits de facteurs premiers.

Pour déterminer le PGCD de deux nombres, on prend tous les facteurs **COMMUNS** rencontrés dans les deux décompositions affectés de leur plus **PETIT** exposant

Pour déterminer le PPCM de deux nombres, on prend tous les facteurs **PRESENTS** rencontrés dans les deux décompositions affectés de leur plus **GRAND** exposant.

N.B. : L'intérêt de cette méthode est qu'elle peut être généralisée à la détermination du PGCD ou du PPCM de plus de deux entiers naturels.

Nouvelle méthode qui vient compléter les méthodes pour trouver le PGCD ou le PPCM de deux entiers naturels.

3°) Exemple

Déterminer le PGCD et le PPCM de 84 et 150 en effectuant la décomposition en produit de facteurs premiers de chacun des deux nombres.

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

La décomposition en produit de facteurs premiers de 84 est : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

La décomposition en produit de facteurs premiers de 150 est : $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.

PGCD(84 ; 150) $=2 \times 3=6$

PPCM(84 ; 150) $= 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Propriété (admise sans démonstration)

Les multiples communs à deux entiers naturels sont les multiples communs de leur PPCM.

V. Autres applications des nombres premiers

1°) Reconnaître un carré ou un cube parfait

Voir exercices.

2°) Simplifier des racines carrées

Rappel

Pour simplifier des racines carrées, on fait apparaître des carrés parfaits sous le radical.

Si le nombre est grand, on peut utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers (voir exercices).

3°) Simplifier des fractions

4°) Donner tous les diviseurs communs à deux entiers

VI. Rappels sur les puissances

Définitions et propriétés	Exemples
a représente un réel quelconque et n un nombre entier supérieur ou égal à 1. a^n représente le produit de n facteurs égaux à a. $a^n = \underbrace{a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}$	$a^1 = a$ $a^0 = 1$
a^{-n} représente l'inverse de a^n. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ $2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$
a et b représentent des réels quelconques m et n représentent des entiers relatifs.	
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^3 \times 2^5 = 2^8$ $2^4 \times 2^{-7} = 2^{-3}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^9}{3^2} = 3^7$
$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$	$\left(5^3\right)^4 = 5^{12}$ $\left(5^{-2}\right)^3 = 5^{-6}$
$(ab)^n = a^n \times b^n$	$(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

Sites Internet :

- integraledesmaths.free.fr
Arithmétique Plus grand diviseur commun (pgdc) et Plus petit multiplicateur commun (ppmc)
Cliquer sur Script !

On donne deux entiers.
L'ordinateur nous donne la décomposition en facteurs premiers des deux nombres, leur PGCD et leur PPCM immédiatement.

- www.devenez-fonctionnaire.fr
Fiche QCM Maths Nombres premiers
- transmath.net
Aller dans le livre de 3e.
Zone de l'élève. Très bien expliqué : fiches élèves sur PGCD ; présentations en tableau avec différences ou divisions.

1ère L Option

Exercices sur les critères de divisibilité et les nombres premiers

1 Décomposer en produit de facteurs premiers chacun des nombres suivants :
$A = 8820$; $B = 73205$; $C = 24 \times 14$; $D = 48 \times 17$

2 En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, déterminer le PGCD et le PPCM de 1 400 et 10 780.

3 **Carrés et cubes parfaits**

1°) Sans calculatrice, démontrer que 324 est un carré parfait.
2°) Sans calculatrice, démontrer que 216 est un cube parfait.
3°) Quel est le plus petit entier naturel :
a) qui, multiplié par 2000, donne un carré parfait ?
b) qui, multiplié par 2100, donne un cube parfait ?

4 **Nombre premiers d'Euler**

1°) Vérifier que pour tous les entiers n de 0 à 40, $n^2 + n + 41$ est un nombre premier.
2°) Vérifier que pour $n = 41$, le nombre $n^2 + n + 41$ n'est pas premier.

5 Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, b le plus petit possible.

$A = \sqrt{24200}$ $\quad$ $B = \sqrt{66150}$

6 1°) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 84 et 150.

84 = ... ; 150 = ...

2°) Simplifier la fraction $\dfrac{84}{150}$. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$\dfrac{84}{150} =$ .....

7 En utilisant la décomposition en facteurs premiers, écrire chacune des fractions suivantes sous forme de fraction irréductible.

$A = \dfrac{2214}{2829}$; $B = \dfrac{15 \times 25}{50 \times 22}$; $C = \dfrac{10^2}{25^4}$; $D = \dfrac{(-8)^2 \times (-15)^3}{12^2 \times 5}$

8 En utilisant la décomposition en facteurs premiers et un arbre de possibilités, déterminer la liste des diviseurs de 84.

9 1°) Décomposer 338 en produit de facteurs premiers.

338

2°) Ecrire $\sqrt{338}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, b le plus petit possible.

10 **« Le nombre caché »**

- Je suis un nombre entier compris entre 100 et 400.
- Je suis pair.
- Je suis divisible par 11.
- J'ai aussi 3 et 5 comme diviseurs.

Qui suis-je ?

Expliquer une démarche permettant de trouver le nombre caché, et donner sa valeur.

11 On considère deux nombres A et B formés de 4 chiffres qui s'écrivent de la façon suivante :
A = 74□5 et B = 187□.

1°) Déterminer le chiffre manquant dans le nombre A afin qu'il soit divisible par 9.
2°) Déterminer le chiffre manquant dans le nombre B afin qu'il soit divisible par 3 et 2.
Donner toutes les possibilités.
3°) Simplifier alors la fraction $\frac{A}{B}$. Donner tous les cas possibles.

Corrigé des exercices sur les critères de divisibilité et les nombres premiers

1 **Décomposition en produit de facteurs premiers**

Décomposition de grands nombres (A et B) : présentation en colonnes, utilisation de la liste des nombres premiers (qui doit être connue) et des critères de divisibilité. On teste tous les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

Vérification sur ordinateur possible (on rentre le nombre et l'on obtient immédiatement la décomposition en facteurs premiers).

8820	2
4410	3
1470	3
490	5
98	2
49	7
7	7
1	

73205	5
14641	11
1331	11
121	11
11	11
1	

$A = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$
$B = 5 \times 11^4$

Décomposition de petits nombres (C et D) : présentation en lignes

$C = 24 \times 14 = 2 \times 12 \times 2 \times 7 = 2^4 \times 3 \times 7$

$D = 48 \times 17 = 2^4 \times 3 \times 17$

2 **Décomposition en facteurs premiers ; recherche de PGCD et de PPCM**

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

10780	2
5390	2
2695	5
539	7
77	7
1	

$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$
$16780 = 2^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$

$\text{PGCD}(1400\,;1680) = 2^2 \times 5 \times 7 = 140$
$\text{PPCM}(1400\,;1680) = 2^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 140$

3 1°) Le mieux est d'utiliser la décomposition en facteurs premiers. Pour cela, on adopte la présentation en colonnes.

$324 = 2^2 \times 3^4 = 2^2 \times 9^2 = 18^2$

On peut retenir qu'un nombre entier supérieur ou égal à 1 est un carré parfait si et seulement si exposants des nombres premiers dans sa décomposition sont tous des nombres pairs.

2°) $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

On peut retenir qu'un nombre entier supérieur ou égal à 1 est un cube parfait si et seulement si les exposants de des nombres premiers dans sa décomposition sont tous des multiples de 3.

3°) a) Pour répondre à la question, on commence par déterminer la décomposition en facteurs premiers de 2000.

$2000 = 2 \times 1000 = 2 \times 10^3 = 2 \times (2 \times 5)^3 = 2 \times 2^3 \times 5^3 = 2^4 \times 5^3$

Remarque : on peut adopter aussi la présentation en colonne classique.

On regarde les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de 2000 : l'exposant de 2 est 4, c'est un nombre pair ; l'exposant de 5 est 3, c'est un nombre impair.

Le plus petit entier naturel qui multiplié par 2000 donne un carré parfait est 5 :

$5 \times 2000 = 5 \times 2^4 \times 5^3 = 2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4 = (10^2)^2 = 100^2$

$5 \times 2000 = 10000 = 100^2$

b) Pour répondre à la question, on commence par déterminer la décomposition en facteurs premiers de 2100.

$2100 = 21 \times 100 = 3 \times 7 \times 4 \times 25 = 3 \times 7 \times 2^2 \times 5^2 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Pour obtenir un cube parfait, il faut que les exposants qui interviennent dans la décomposition en facteurs premiers soient tous des multiples de 3.

Le plus petit entier naturel qui, multiplié par 2100, donne un cube parfait est : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 4410$.

4 **Nombres premier d'Euler**

1°) $0^2 + 0 + 41 = 41$ nombre premier
$1^2 + 1 + 41 = 43$ nombre premier
$2^2 + 2 + 41 = 47$ nombre premier
$3^2 + 3 + 41 = 53$ nombre premier
$4^2 + 4 + 41 = 61$ nombre premier
$5^2 + 5 + 41 = 71$ nombre premier
$6^2 + 6 + 41 = 83$ nombre premier

2°) $41^2 + 41 + 41 = 41 \times (41 + 2) = 41 \times 43$ n'est pas un nombre premier (car il est divisible par 41).

5 On commence par écrire les décompositions en facteurs premiers des nombres qui figurent sous le radical.

24200	2
12100	2
6050	2
3025	5
605	5
121	11
11	11
1	

$24200 = 2^3 \times 5^2 \times 11^2$

$A = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5^2 \times 11^2}$

$A = 2 \times 5 \times 11 \times \sqrt{2}$

$A = 110\sqrt{2}$

66150	2
33075	3
11025	3
3675	3
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$66150 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2$

$B = \sqrt{2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2}$

$B = 3 \times 5 \times 7 \times \sqrt{2 \times 3}$

$B = 105\sqrt{6}$

6 1°) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$; $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

2°) $\dfrac{84}{150} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5^2} = \dfrac{2 \times 7}{5^2} = \dfrac{14}{25}$

7 $A = \dfrac{2214}{2829} = \dfrac{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 41}{3 \times 943} = \dfrac{738}{943}$

$B = \dfrac{15 \times 25}{50 \times 22} = \dfrac{\cancel{5} \times 3 \times \cancel{5} \times 5}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times 2 \times 2 \times 11} = \dfrac{15}{44}$

$C = \dfrac{10^2}{25^4} = \dfrac{2 \times 5 \times 2 \times 5}{5^8} = \dfrac{4}{5^6} = \dfrac{4}{15625}$

$D = \dfrac{(-8)^2 \times (-15)^3}{12^2 \times 5} = -\dfrac{2^6 \times 5^3 \times 3^3}{2^4 \times 3^2 \times 5} = -2^2 \times 5^2 \times 3 = -300$

8 $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.
Les diviseurs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

10 Le nombre cherché est pair, donc divisible par 2.
Il est aussi divisible par 3, 5 et 11.

Il est donc divisible par 2 × 3 × 5 × 11, donc par 330.

Il est compris entre 100 et 400 : le seul nombre multiple de 330 compris entre 100 et 400 est 330, donc le nombre cherché est 330.
D'autres raisonnements sont bien sûrs possibles.