

- 1°) Quels sont les diviseurs de 45 ?  
2°) Les côtés d'un rectangle ont pour mesures des nombres entiers ; son aire est 45.  
Quelles peuvent être ses dimensions ?

**2) Nombres parfaits**

Un nombre entier est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

Ce sont les seuls nombres parfaits inférieurs à 100.

Note : Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à 1000 qui sont 6, 28 et 496.

**3) Nombres amiables**

Deux entiers sont dits **amiables** si chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts (c'est-à-dire autre que lui-même) de l'autre.

Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

- 4) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7.

- 5) Trouver les couples  $(x ; y)$  d'entiers naturels tels que  $x^2 - y^2 = 5$ .

- 6) Déterminer le PGCD des nombres 963 et 153 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

- 7) 1°) Déterminer le PGCD des nombres 108 et 135.

2°) Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de sorte que :

- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
- toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

a) Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

b) Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

- 8) Pour le 1<sup>er</sup> mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.

Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.

Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

- 1) Les diviseurs de 45 sont 1, 3, 5, 9, 15, 45.

$$(L = 9 \text{ et } l = 5) \text{ ou } (L = 15 \text{ ou } l = 3) \text{ ou } (L = 45 \text{ ou } l = 1)$$

Cet exercice est intéressant car il permet de bien montrer aux élèves que les diviseurs marchent par paires.

**2) Nombres parfaits**

- Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3, 6.

On a :  $1 + 2 + 3 = 6$  donc 6 est un nombre parfait.

- Les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28.

On a :  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$  donc 28 est un nombre parfait.

- 3) Somme des diviseurs de 220 :  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$   
Somme des diviseurs de 284 :  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

- 7) 1°) Déterminons le PGCD de 108 et 135 avec l'algorithme d'Euclide.

Division euclidienne de 135 par 108 :  $135 = 108 \times 1 + 27$ .

Division euclidienne de 108 par 27 :  $108 = 27 \times 8 + 0$ .

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul.

$$\text{PGCD}(108 ; 135) = 27$$

2°) a) maximum de 27 paquets.

- b)  $\left. \begin{array}{l} 5 \text{ billes noires} \\ 4 \text{ billes rouges} \end{array} \right\} \text{ par paquets}$

- 8) On détermine le PGCD de 78 et de 182 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Division euclidienne de 182 par 78 :  $182 = 78 \times 2 + 26$ .

Division euclidienne de 78 par 26 :  $78 = 3 \times 26 + 0$ .

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul donc  $\text{PGCD}(182 ; 78) = 26$ .

Donc Julie pourra donc faire au maximum 26 bouquets composés chacun de 3 roses (puisque  $78 = 3 \times 26$ ) et de 7 brins de muguet (puisque  $182 = 7 \times 26$ ).