1ère L Option

Arithmétique (2)
Multiples ; diviseurs ; PGCD ; PPCM

I. Multiples et diviseurs

1°) Définition

a et b sont deux entiers naturels.
S'il existe un entier q tel que $a = bq$, alors on peut dire que :
- « b divise a »
- « a est divisible par b »
- « b est un diviseur de a »
- « a est un multiple de b »

2°) Exemple

On a : $36 = 9\times 4$.

On peut donc dire que :

- 9 divise 36
- 36 est divisible par 9
- 9 est un diviseur de 36
- 36 est un multiple de 9

3°) Définition équivalente

On suppose que $b \neq 0$.
a est divisible par b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

4°) Remarque

● 0 est divisible par n'importe quel entier naturel.

En effet, pour tout entier naturel n, on a : $0 = 0\times n$.

● Tout entier naturel a est toujours divisible par 1 et par lui-même.

En effet : $a = a\times 1$

Il en résulte que tout entier naturel a distinct de 1 admet toujours au moins deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même.

5°) Liste de tous les diviseurs d'un entier naturel

Question : Trouver tous les diviseurs d'un entier naturel

● Quelques exemples

Liste des diviseurs de 1 : 1.

Liste des diviseurs de 2 : 1 ; 2.

Liste des diviseurs de 3 : 1 ; 3.

Liste des diviseurs de 4 : 1, 2, 4.

Liste des diviseurs de 5 : 1, 5.

Liste des diviseurs de 6 : 1, 2, 3, 6.

● **Exercice :** Trouver tous les diviseurs de 150.

Solution :

On peut écrire : $150 = 1\times 150 = 2\times 75 = 3\times 50 = 5\times 30 = 6\times 25 = 10\times 15$.
Ce sont les seules manières d'écrire 150 sous la forme de produits de deux naturels.
L'ensemble des diviseurs entiers naturels de 150 est l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15; 25 ; 30; 50 ; 75; 150}.
Cette méthode présente l'avantage de montrer que les diviseurs marchent par paires.

● Retenir la méthode :

- Les diviseurs d'un naturel « vont » par deux, sauf si le nombre est un carré.

- Pour écrire un nombre donné sous forme d'un produit, on peut utiliser les critères de divisibilité.

On apprendra dans un autre chapitre une autre méthode pour déterminer la liste de tous les diviseurs d'un entier donné.

6°) Définition d'un nombre premier

Un entier naturel est dit **premier** s'il est distinct de 1 et s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Exemples :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43…

Il y a une infinité de nombres premiers.

Un chapitre spécial sera consacré à l'étude des nombres premiers.

II. PGCD de deux entiers naturels

1°) Diviseurs communs à deux entiers positifs

Définition :

Les diviseurs communs à deux entiers *a* et *b* sont les entiers qui divisent à la fois *a* et *b*.

2°) Exemple :

Déterminer les diviseurs communs à 12 et à 20.

Les diviseurs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Finalement, les diviseurs communs à 20 et 24 sont : 1, 2 et 4.

3°) Remarque

Il y a toujours un diviseur commun à deux nombres entiers car 1 divise n'importe quel entier.

4°) Plus Grand Commun Diviseur à deux nombres entiers positifs

Définition

Le plus grand des diviseurs communs à deux entiers naturels *a* et *b* s'appelle le Plus Grand Commun Diviseur de *a* et *b* et se note PGCD (*a* ; *b*).

5°) Reprise de l'exemple du 2°)

On a : PGCD(20 ; 24) = 4.

6°) Quelques petites propriétés

- PGCD(a ; b)=PGCD(b ; a).

(Ainsi, il est indifférent de noter PGCD(20 ; 24)=4 ou PGCD(24 ; 20) = 4).

- Si b divise a alors PGCD(a ; b) = b.

- PGCD(a ; 1)=1

- PGCD(a ; 0)=a

7°) Propriété (admise sans demonstration)

Les diviseurs communs à deux entiers naturels sont les diviseurs du PGCD.

8°) Algorithmes de recherche du PGCD de deux entiers naturels

Il existe deux algorithmes de recherche du PGCD de deux entiers :

- l'algorithme des différences successives ;
- l'algorithme des divisions euclidiennes successives ou algorithme d'Euclide (voir paragraphe suivant).

L'algorithme d'Euclide est plus rapide que l'algorithme des différences successives.

On peut aussi déterminer le PGCD directement en dressant la liste de tous les diviseurs des deux entiers (mais c'est souvent très long) ou utiliser la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres (voir chapitre sur les nombres premiers).

III. Recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Rechercher le PGCD en établissant la liste des diviseurs de deux nombres peut être fastidieux lorsque ces deux nombres sont grands. On peut alors utiliser « l'algorithme d'Euclide ».

1°) PGCD et division euclidienne

Propriété (admise sans démonstration)

Si *a* et *b* sont deux nombres entiers naturels non nuls tels que *a* > *b*, alors PGCD(*a* ; *b*)=PGCD(*b* ; *r*) où *r* est le reste de la division euclidienne de *a* par *b*.

2°) Exemple

La division euclidienne de 126 par 54 donne : $126 = 54 \times 2 + 18$.

Alors on a PGCD(126 ; 54) = PGCD(54 ; 18)

Or $54 = 18 \times 3$ donc PGCD(54 ; 18) = 18.
On en déduit PGCD(126 ; 54) = 18

3°) Un peu d'histoire…

Définition trouvée dans le dictionnaire du mot algorithme : « suite finie d'opérations élémentaires constituant un schéma de calcul ou de résolution d'un problème »

Le mot **« algorithme »** vient du nom du grand mathématicien persan Al Khwarizmi (vers l'an 820), qui introduisit en Occident la numération décimale (rapportée d'Inde) et enseigna les règles élémentaires des calculs s'y rapportant. La notion d'algorithme est donc historiquement liée aux manipulations numériques, mais elle s'est progressivement développée pour porter sur des objets de plus en plus complexes, des textes, des images, des formules logiques, des objets physiques, etc.

Les *Éléments* sont un traité mathématique et géométrique, constitué de 13 livres organisés thématiquement, probablement écrit par le mathématicien grec **Euclide** vers 300 av. J.-C. Il comprend une collection de définitions, axiomes, théorèmes et leurs démonstrations. Les *Éléments* sont le plus ancien exemple connu d'un traitement de la géométrie et son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit probablement du recueil qui a rencontré le plus de succès au cours de l'Histoire : les *Éléments* furent l'un des premiers livres imprimés (Venise, 1482) et n'est précédé que par la Bible pour le nombre d'éditions publiées (largement plus de 1 000). Pendant des siècles, il faisait partie du cursus universitaire standard.

L'algorithme d'Euclide est un algorithme permettant de déterminer le plus grand commun diviseur (P.G.C.D.) de deux entiers. Il est déjà décrit dans le livre VII des *Eléments* d'Euclide.

4°) Description de l'algorithme d'Euclide

Soit a et b deux nombres entiers positifs tels que $a > b$ et $b \neq 0$.

On effectue la division euclidienne de a par b.

Si le reste r est nul : alors cela signifie qu'il existe un entier positif q tel que $a = bq$ et b divise a. Dans ce cas PGCD(a ; b) = b.

Si le reste r est non nul : d'après la propriété précédente PGCD (a ; b) = PGCD(b ; r).
On effectue alors la division euclidienne de b par r, autrement dit on réitère l'opération précédente en remplaçant a par b et b par r.

On admet que l'algorithme s'arrête lorsqu'on trouve un reste nul.

Propriété : (admise sans démonstration)
Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul.

5°) Exemple

A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminons le PGCD de 1 053 et 325.

Division euclidienne de 1 053 par 325 : $1053=325\times3+78$

Division euclidienne de 325 par 78 : $325=78\times4+13$

Division euclidienne de 78 par 13 : $78=13\times6+0$

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul.

PGCD(325 ; 78) = 13

Bilan des méthodes pour trouver le PGCD de deux entiers naturels :

- écrire la liste de tous les diviseurs de chacun des deux entiers ;
- utiliser l'algorithme de la différence ;
- utiliser l'algorithme d'Euclide ;
- utiliser la décomposition en nombres premiers (voir chapitre suivant).

6°) Utilisation d'un tableur pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers (voir plus tard)

On retiendra qu'il peut-être plus efficace de faire appel à un tableur lorsque les nombres sont grands et lorsque les étapes de l'algorithme sont nombreuses.

7°) Applications des PGCD à des problèmes concrets

Voir exercices.

IV. Nombres premiers entre eux

1°) Définition (à savoir par cœur)

***a* et *b* sont deux entiers naturels.**
Lorsque PGCD(a ; b) = 1, on dit que a et b sont deux nombres premiers entre eux.

2°) Propriété

Deux entiers naturels sont premiers entre eux si et seulement si leur seul diviseur commun est 1.

3°) Exemple et contre-exemple

● 15 et 26 sont premiers entre eux.

En effet, les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5, 15.
Les diviseurs de 26 sont 1, 2, 13 et 26.

Le seul diviseur commun à 15 et 26 est donc 1.
Ainsi PGCD(15 ; 26)=1

● 20 et 24 ne sont pas premiers entre eux car PGCD(20 ; 24) = 4 et $4\neq1$.
On peut aussi dire que 20 et 24 ne sont pas premiers entre aux car ils sont tous les deux divisibles par 2.

V. Fractions irréductibles

1°) Simplification d'une fraction

Principe général :

Pour simplifier une fraction, il faut connaître un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

2°) Définition

a et b sont deux entiers naturels avec $b\neq0$.
La fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** lorsque *a et b* sont premiers entre eux.

3°) Exemple et contre-exemple

● PGCD(12 ; 5) = 1 donc la fraction $\frac{12}{5}$ est irréductible.

● PGCD(22 ; 4) = 2 donc la fraction $\frac{22}{4}$ n'est pas irréductible.

4°) Lien entre fraction irréductible et PGCD

Méthode pour rendre irréductible une fraction en une seule étape :

- On calcule le PGCD du numérateur et du dénominateur (avec par exemple l'algorithme d'Euclide)
- On divise le numérateur et le dénominateur par ce PGCD

5°) Exemple

Ecrire sous forme irréductible la fraction $\frac{630}{924}$.

Déterminons le PGCD(630 ; 924) avec l'algorithme d'Euclide.

Division euclidienne de 924 par 630 : $924=630\times1+294$
Division euclidienne de 630 par 294 : $630=294\times2+42$
Division euclidienne de 294 par 42 : $294=42\times7+0$
Dans l'algorithme d'Euclide le PGCD est le dernier reste non nul.

$$\frac{630}{924}=\frac{630:42}{924:42}=\frac{15}{22}$$

La forme irréductible de la fraction $\frac{630}{924}$ est $\frac{15}{22}$.

VI. <u>PPCM de deux entiers naturels</u>

1°) Définition

On appelle PPCM de deux entiers naturels *a* et *b* non nuls le plus petit entier naturel qui est un multiple commun à *a* et *b*.

2°) Exemple

Recherche du PPCM de 6 et 15.

Multiples de 6 : 0, 6, 12, 24, 30, 36, 42, 49 …
Multiples de 15 : 0, 15, 30, 45, 60 …

$\text{PPCM}(6\,;15)=30$

3°) Application : recherche d'un dénominateur commun à deux fractions de dénominateurs différents.

Exemple :

$\frac{5}{12}$ et $\frac{7}{8}$

Le PPCM de 12 et de 8 est égal à 24.

$\frac{5}{12}=\frac{10}{24}$; $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$

4°) Utilisations

- comparaison de fractions
- calcul de sommes ou de différence de fractions

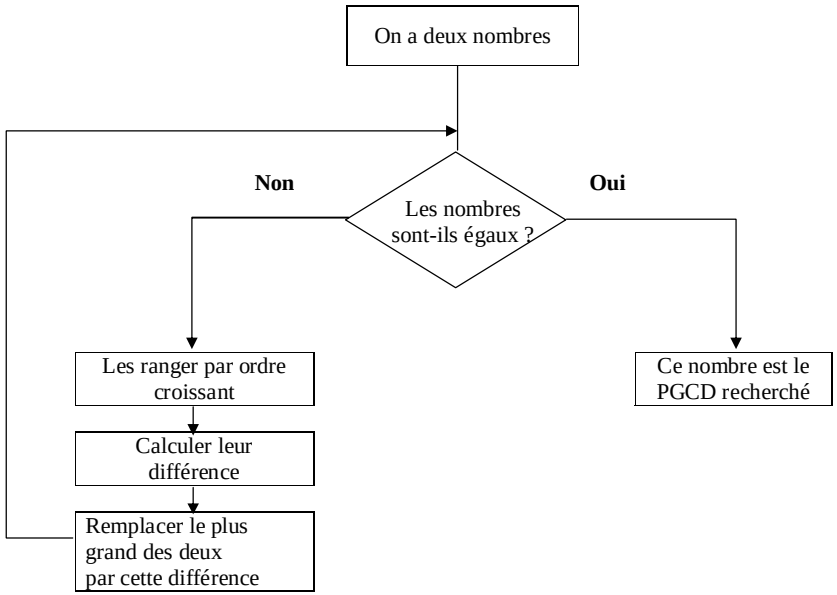
VII. <u>Retour sur les algorithmes de recherche du PGCD de deux entiers naturels : organigrammes, rédaction et programmation</u>

Il s'agit de deux algorithmes avec boucle et test d'arrêt.

En arrivant en seconde, ils connaissent soit l'algorithme d'Euclide, soit celui des différences successives pour calculer le PGCD de deux nombres. Ils ne l'ont pourtant pas expérimenté avec un ordinateur ou une calculette. L'intérêt est pourtant grand et très concret : trouver ce diviseur bien particulier de façon rapide et simple. Comme ce n'est pas un chapitre mais une compétence transversale, les algorithmes rencontrés doivent rester encrés dans la réalité du cours et répondre à un besoin.

1°) Organigrammes

• Organigramme de l'algorithme des soustractions successives



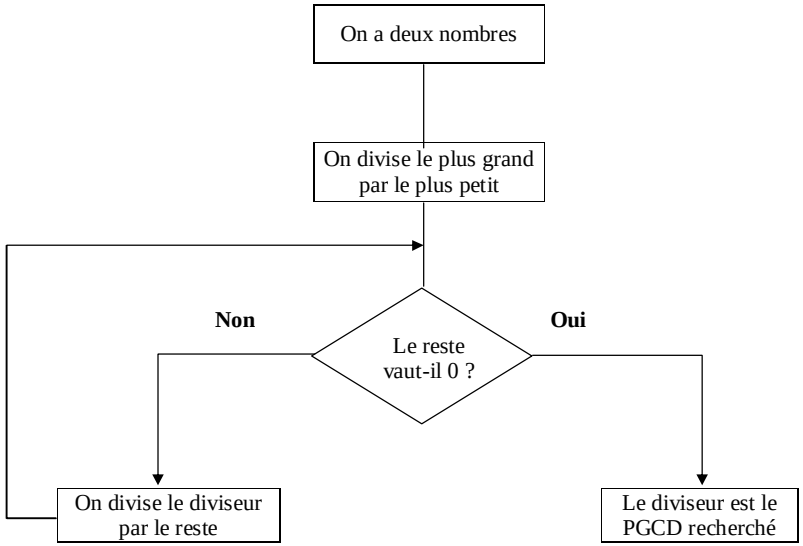
Exemple de mise en œuvre :

Calculer le PGCD de 378 et de 108 avec l'algorithme des soustractions successives.

$378 - 108 = 270$
$270 - 108 = 162$
$162 - 108 = 54$
$108 - 54 = 54$
$54 - 54 = 0$

Le PGCD de 378 et 108 est 54.

- **Organigramme de l'algorithme d'Euclide**



2°) Ecriture des deux algorithmes en langage naturel

- **Ecriture de l'algorithme des différences successives**

- **Ecriture de l'algorithme d'Euclide**

Variables : *a*, *b*, *r* entiers naturels

Entrées :
Saisir *a* et *b*

Traitement :
Tantque le reste de la division euclidienne de *a* par *b* est non nul **Faire**
r prend la valeur du reste de la division euclidienne de *a* par *b*
a prend la valeur *b*
b prend la valeur *r*
FinTantque

Sortie :
Afficher *b*

Commentaires :

Variables :

Les variables sont :
- les deux nombres entiers, *a* et *b*, utilisés à chaque étape de l'algorithme ;
- le reste *r* de la division euclidienne de *a* par *b*.

Entrées et Traitement :

On saisit les deux nombres, puis on répète la division jusqu'à ce que l'on ait un reste nul.

Sortie :

Le PGCD est le dernier reste non nul.

Mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide sur tableur

Programmation de l'algorithme d'Euclide

1ère L Option

Exercices sur multiples, diviseurs, PGCD, PPCM

1 1°) Quels sont les diviseurs de 45 ?
2°) Les côtés d'un rectangle ont pour mesures des nombres entiers ; son aire est 45.
Quelles peuvent être ses dimensions ?

2 **Nombres parfaits**

Un nombre entier est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

Ce sont les seuls nombres parfaits inférieurs à 100.

Note : Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à 1000 qui sont 6, 28 et 496.

3 **Nombres amiables**

Deux entiers sont dits **amiables** si chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts (c'est-à-dire autre que lui-même) de l'autre.
Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

4 Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

5 Trouver les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 5$.

6 Déterminer le PGCD des nombres 963 et 153 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

7 1°) Déterminer le PGCD des nombres 108 et 135.
2°) Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de sorte que :
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
- toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

a) Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?
b) Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

8 Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.
Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.
Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?
Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

9 1°) Soit n un entier naturel. Développer le produit $(n+1)(n+2)$.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + 3n + 2$ est divisible par $n+1$.

10 Déterminer le PPCM de 4 et 18.

11 **Problème à résoudre : interpréter un algorithme plus complexe**

N est un entier naturel non nul.
1°) Initialisation : la liste L est vide.
2°) Pour tout entier naturel k compris entre 1 et N, on effectue la division euclidienne de N par k.
- On obtient un quotient et un reste.
- Si le reste est nul, alors on écrit k dans la liste L.
- Sinon on passe à l'entier k suivant.

3°) Quand toutes les valeurs de k ont été examinées, on calcule le nombre S des termes de la liste L.

Question : que représente S ?

Solutions

1 1°) Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15, 45.
2°) Les côtés d'un rectangle ont pour mesures des nombres entiers ; son aire est 45.
D'après la question 1°), les dimensions du rectangle peuvent être :

1 et 45 ;
3 et 15 ;
5 et 9.

N.B. : On n'oublie pas que les diviseurs « marchent » par paire.

2 **Nombres parfaits**

Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3, 6. On a : 6 = 1 + 2 + 3 donc 6 est nombre parfait.
Les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28. On a : 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 donc 28 est un nombre parfait.

Pour en savoir plus sur les nombres parfaits, faire une recherche sur Wikipedia.

3 La somme des diviseurs de 220 est égale à 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 + 220 = 504
La somme des diviseurs de 284 est égale à 1 + 2 + 4 + 71 + 142 + 284 = 504

On constate que ces deux sommes sont égales donc on en déduit que les nombres 220 et 284 sont amicaux.

Pour en savoir plus sur les nombres amicaux, faire une recherche sur Wikipedia.

4 Démontrons que pour tout entier naturel n, $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

On peut écrire : $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2^n \times 2^1 + 2^n \times 2^2 = \left(1 + 2^1 + 2^2\right) \times 2^n = 7 \times 2^n$

On utilise la règle sur les puissances : $a^{m+n} = a^m \times a^n$.

Comme 2^n est un entier naturel, on peut dire que $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

5 Trouvons les couples (x ; y) d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 5$.

Analyse :

On suppose qu'il existe un couple (x ; y) d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 5$ (1).

On a $x^2 - y^2 > 0$ donc $x^2 > y^2$.
Comme x et y sont des entiers naturels (donc positifs ou nuls), on a : $x > y$.

La relation (1) est équivalente à $(x+y)(x-y) = 5$.

Or $x + y$ et $x - y$ sont des entiers naturels, donc ce sont des diviseurs de 5.

Or les diviseurs de 5 sont : 1 et 5 (5 est un nombre premier, car ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même).

De plus, $x + y \geqslant x - y$.

Donc nécessairement, on a : $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ (les diviseurs marchent par deux).

On résout ce système linéaire.

On additionne et on soustrait ces deux équations membre à membre.

On obtient alors : $\begin{cases} 2x=6 \\ 2y=4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vérification :

On a bien : $3^2 - 2^2 = 5$.

Le seul couple d'entiers naturels solution de (1) est le couple (3 ; 2).

6 Déterminons le PGCD des nombres 963 et 153 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

963 = 153 × 6 + 45
153 = 3 × 45 + 18
45 = 2 × 18 + 9
18 = 2 × 9 + 0

Donc PGCD (963 ; 153) = 9.

7 1°) Utilisons l'algorithme d'Euclide :

135 = 108 × 1 + 27
108 = 27 × 4 + 0
Donc PGCD (135 ; 108) = 27.

2°) Si n est le nombre de paquets, comme Marc veut utiliser toutes les billes et que les paquets soient identiques, n doit diviser 135 et 108 (donc n est un diviseur de 135 et de 108).
Comme de plus, il veut en faire le plus grand nombre possible, n doit être le plus grand possible.
Alors n est le PGCD de 135 et 108.

Donc Marc pourra faire 27 paquets de billes.

108 : 27 = 4 Il y aura donc 4 billes rouges dans chaque paquet.
135 : 27 = 5 Il y aura donc 5 billes noires dans chaque paquet.

8 PGCD(182 ; 78) = 26.
Donc elle pourra faire 26 bouquets composé chacun de 3 roses (puisque 78 = 3 × 26) et de 7 brins de muguet (puisque 182 = 7×26).

10 PPCM (4 ; 18) = 36

11 S représente la somme des diviseurs entiers naturels de N.