TS3

Contrôle du jeudi 17 mars 2011 (45 minutes)

Écrire très lisiblement au stylo et sans ratures.
Ne rien écrire sur cette feuille en dehors de ce qui est demandé (même au crayon à papier).

Prénom : …………………………….. **Nom :** ……………………………. **Note : ………. / 20**

I. (10 points) Compléter le tableau ci-contre en donnant une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I précisé dans la colonne de gauche.
Mettre un seul résultat à chaque fois, en simplifiant préalablement si nécessaire.
Tirer la barre supérieure du symbole de racine carrée à la règle.
Tirer les traits de fractions à la règle.

$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3}$	$F : x \mapsto$ …………………
$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f : x \mapsto 2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$F : x \mapsto$ …………………
$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^3$	$F : x \mapsto$ …………………
$\mathrm{I}=\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$	$F : x \mapsto$ …………………
$\mathrm{I}=\left]1\,;+\infty\right[$	$f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ *	$F : x \mapsto$ …………………

*** Indication :** On pourra observer que pour tout $x \in \mathrm{I}$: $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$)

II. (5 points) Vrai ou Faux

Pour chaque affirmation, dire sans justifier si elle est **vraie** ou **fausse (compléter le tableau ci-dessous par V ou F)**.
Chaque réponse juste rapporte 1 point ; chaque réponse fausse ou absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Dans une loterie, on peut gagner 15 € et 30 € avec des probabilités égales à $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{6}$ respectivement.

A. Le joueur a une chance sur deux de ne rien gagner.

B. L'espérance de gain du joueur est de 10 €.

C. À cette loterie, un joueur gagne en moyenne 22,5 €.

D. L'écart-type du gain du joueur est égal à $5\sqrt{5}$.

E. Si la mise est de 5 €, le jeu est équitable.

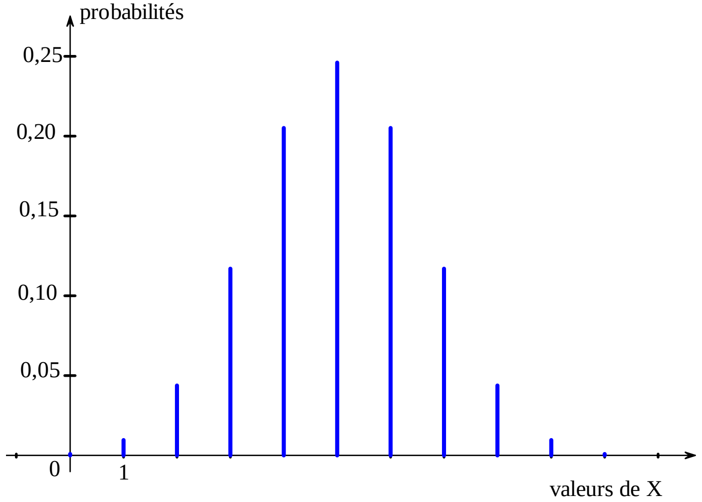
Question	A	B	C	D	E	**Total**
Réponse						

III. (2 points) Un joueur lance 10 fois de suite une pièce bien équilibrée. Il gagne 0,5 € chaque fois que « face » apparaît.

1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne 4 €. Donner le résultat sous forme décimale (sans arrondir le résultat).

La probabilité que le joueur gagne 4 € est égale à ……………………………..…….

2°) On donne ci-dessous le diagramme en bâtons de la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}5$ (X désigne une variable aléatoire qui suit cette loi).



Le résultat précédent est-il en accord avec ce graphique ? Répondre par oui ou non sans justifier.

………………….

IV. (3 points) On admet que la probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans le train est 0,005. Un train transporte 850 voyageurs. On admettra que ces voyageurs se sont regroupés au hasard et que leurs comportement, par rapport à leurs bagages, sont indépendants les uns des autres.
On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

1°) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Répondre avec le plus de précision possible.

X suit ……………..……………………………………………………………………………………….

2°) Calculer son espérance mathématique et sa variance. Donner les résultats sous forme décimale exacte (sans arrondir).

Écrire à chaque fois un seul résultat sans écrire de formule ni de calcul.

• L'espérance de X est égale à ……………………….…………
• La variance de X est égale à …………………………………

3°) Bonus :

Calculer $P(\mathrm{X} = 10)$ et $P(\mathrm{X} \leqslant 10)$ **en utilisant la calculatrice**.
Donner les valeurs arrondies au millième. Ne pas détailler les calculs.

Bonus au choix (1 point)

① Déterminer l'expression d'une primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2+\sin^2 x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

…………………………………………………………………

② Déterminer l'expression d'une primitive G de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

…………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 17-3-2011

I. On demande chaque fois une primitive ; il n'y a donc pas lieu d'ajouter une constante.

$I=\mathbb{R}$	$f: x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}$	$F: x \mapsto -\dfrac{1}{2(e^x+1)^2}$
$I=\mathbb{R}$	$f: x \mapsto 2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$F: x \mapsto \dfrac{2}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$I=\mathbb{R}$	$f: x \mapsto e^{-x}(e^{-x}+1)^3$	$F: x \mapsto -\dfrac{(e^{-x}+1)^4}{4}$
$I=\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$	$f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$	$F: x \mapsto -\dfrac{2}{3}\sqrt{2-3x}$
$I=]1\,;+\infty[$	$f: x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$	$F: x \mapsto x+2\ln(x-1)$

Barème :

Chaque primitive est notée sur 2 points.

Chaque faute de signe enlève 1 point.

II. Vrai ou Faux

A. Le joueur a une chance sur deux de ne rien gagner.

B. L'espérance de gain du joueur est de 10 €.

C. À cette loterie, un joueur gagne en moyenne 22,5 €.

D. L'écart-type du gain du joueur est égal à $5\sqrt{5}$.

E. Si la mise est de 5 €, le jeu est équitable.

Question	A	B	C	D	E
Réponse	V	V	F	V	F

Détail des calculs :

On note X le gain algébrique du joueur en euros.

La loi de X est donnée dans le tableau :

x_i	0	15	30	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

Question A :

Voir tableau donnant la loi de probabilité de X.

Question B :

L'espérance de X est égale à

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{3}\times 15+\frac{1}{6}\times 30=5+5=10$$

Question C :

Découle de la question B.

Question D :

On commence par calculer la variance de X :

$$V(X)=\left(0-\frac{10}{13}\right)^2\times\frac{9}{13}+\left(1-\frac{10}{13}\right)^2\times\frac{1}{13}+\left(2-\frac{10}{13}\right)^2\times\frac{1}{13}+\left(3-\frac{10}{13}\right)^2\times\frac{1}{13}+\left(4-\frac{10}{13}\right)^2\times\frac{1}{13}$$
$$=125$$

L'écart-type de X est égal à :

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}$$
$$= 5\sqrt{5}$$

Question E :

Découle de l'espérance.

III.

1°)

La probabilité que le joueur gagne 4 € est égale à 0,0439453125.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où « face » apparaît.
X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,5.
La probabilité que le joueur gagne 4 € est :

$$P(\mathrm{X}=8) = \binom{10}{8} \times 0,5^8 \times 0,5^2 = \frac{10!}{8! \times 2!} \times 0,5^{10} = 0,043\ 945\ 312\ 5$$

2°) Le résultat précédent est en accord avec le graphique.

IV.

1°) Pour chaque voyageur il y a deux possibilités :
- il oublie ses bagages dans le train, avec la probabilité 0,005, ou bien
- il n'oublie pas ses bagages dans le train, avec la probabilité 0,995.

Les comportements de chacun des 850 voyageurs du train sont indépendants les uns des autres.
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 850$ et $p = 0,005$.

2°) On applique les formules du cours donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 850 \times 0,005$ donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4,25$ voyageurs ayant oublié leurs bagages.

$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1-p) = 850 \times 0,005 \times 0,995 = 4,22875$

3°) **Bonus :**

En utilisant les commandes de la calculatrice pour la loi binomiale, on obtient :

$P(\mathrm{X}=10) = 0,0074547983\ldots$

$P(\mathrm{X} \leqslant 10) = 0,9925452017\ldots$