1ère S — Relations métriques dans le triangle

I. Théorème de Pythagore généralisé (formule du côté ou d'Al-Kashi)

1°) Formule

Dans un triangle ABC quelconque, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{A}$.

2°) Démonstration

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \qquad \text{(identité remarquable scalaire)} \\ &= AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{A} \end{aligned}$$

3°) Remarque

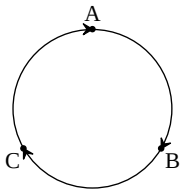
La formule d'Al-Kashi généralise le théorème de Pythagore.

En effet, lorsque le triangle ABC est rectangle en A alors $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\widehat{A} = 0$.

Donc la relation s'écrit : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

4°) Conséquence

Par **permutation circulaire** des lettres A, B, C,



on obtient aussi les relations :

$CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2\,BC \times BA \times \cos\widehat{B}$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\,CA \times CB \times \cos\widehat{C}$

II. Aire d'un triangle quelconque

1°) Formule

ABC est un triangle quelconque.
On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

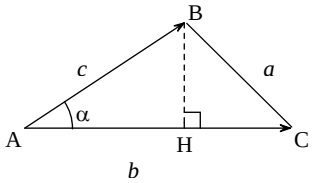
L'aire du triangle ABC est donnée par la formule : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

2°) Démonstration

On pose $\widehat{BAC} = \alpha \quad (\alpha \in [0\,;\pi])$.

On note H le pied de la hauteur issue de B.

• **1er cas :** $\widehat{A}$ aigu $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

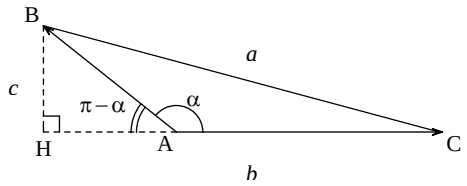


$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH$

Or : $BH = c \times \sin\alpha$

Donc $S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin\alpha$

• **2e cas :** $\widehat{A}$ obtus $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$



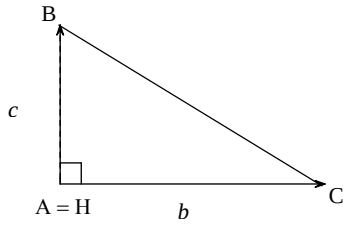
$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH$

Or : $BH = c \times \sin(\pi - \alpha)$

$BH = c \times \sin\alpha$

Donc $S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin\alpha$

• **3e cas :** $\widehat{A}$ droit $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

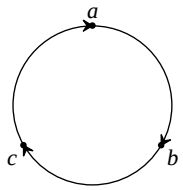


$S = \frac{1}{2}bc$

Or $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\alpha = 1$

$S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin\alpha$

3°) Conséquence



$$S = \frac{1}{2}bc \sin\widehat{A}$$
$$S = \frac{1}{2}ca \sin\widehat{B}$$
$$S = \frac{1}{2}ab \sin\widehat{C}$$

III. Formule des sinus

1°) Démonstration
(mêmes notations qu'au II)

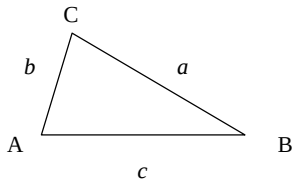
$$\frac{2S}{abc} = \frac{bc \sin\widehat{A}}{abc} = \frac{ca \sin\widehat{B}}{abc} = \frac{ab \sin\widehat{C}}{abc} \quad : (abc)$$

Donc $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$

2°) Formule des sinus

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Lettres précisées sur la figure



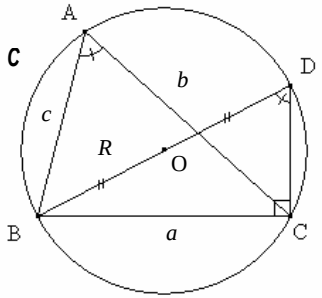
Chaque lettre minuscule désigne la longueur du côté opposé à l'angle nommé avec la même lettre en majuscule.

3°) Lien avec le rayon du cercle circonscrit

ABC est un triangle quelconque.

C est le cercle circonscrit à ABC.

On note O son centre et *R* son rayon.



On note D le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}$.

On suppose que $\widehat{A}$ est aigu.
Le triangle BCD est rectangle en C.

$$\sin\widehat{BDC} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$$

Donc $2R\sin\widehat{BDC} = a$ (1)

Or $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ qui interceptent le même arc.

Donc d'après le corollaire du théorème de l'angle inscrit, ils ont la même mesure.
$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

(1) s'écrit alors : $2R\sin\widehat{A} = a$.

Finalement :

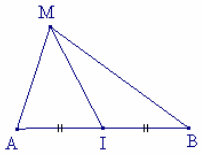
$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R}$$

IV. Théorème de la médiane

1°) Formule de la médiane

A et B sont deux points quelconques de *E*.
I est le milieu de $[AB]$.

$$\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



2°) Démonstration (ROC)

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)}_{\vec{0}} \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un énoncé universel (phrase quantifiée avec « $\forall M \in P$ »), on peut particulariser le point M selon les besoins du problème.

3°) Autres formules à savoir (dites aussi parfois aussi « formules de la médiane »)

A et B sont deux points quelconques.
I est le milieu de [AB].

$$\forall M \in P \quad MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} \\ &= \left(-2\overrightarrow{IM}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right) \\ &= 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} \end{aligned}$$

A et B sont deux points quelconques.
I est le milieu de [AB].

$$\forall M \in P \qquad \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) \\ &\quad \text{Identité remarquable scalaire} \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 \\ &= MI^2 - \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$