TS3

Contrôle du samedi 3 décembre 2010 (4 h)

- **Au début de la copie, aménager un cartouche de présentation avec le numéro des exercices de I à V permettant d'indiquer le nombre de points pour chaque exercice.**
- **Rédiger très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume. Ne pas utiliser d'abréviations.**
- **Encadrer en rouge à la règle tous les résultats demandés.**
- **L'énoncé donne quelques modèles de rédaction qui doivent être respectés.**
- **Tous les traits de fraction doivent être tirés à la règle.**
- **Les graphiques des exercices II et III devront être faits sur une feuille à part à petits carreaux.**
- **Ne pas rendre l'énoncé dans la copie.**

I. (6 points)

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \right)$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{2}}{x-1}$.

On pourra utiliser l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour tous réels a et b.

II. (12 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ que l'on précisera.

2°) Calculer $f'(x)$. Dresser un tableau récapitulatif donnant le signe de $f'(x)$ et les variations de f avec les limites et les extremums (faire ce tableau ainsi que les flèches de variations à la règle).
Ne pas détailler le calcul des extremums sur la copie.

3°) Déterminer les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses.

4°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (sans détailler les calculs sur la copie) :

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						

Faire un graphique en prenant le centimètre pour unité graphique.
Marquer les points correspondant au tableau de valeurs (sous la forme de points et non de croix) ; tracer Δ et les tangentes horizontales.
Tracer $\mathcal{C}$. Indiquer le nom de la courbe $\mathcal{C}$.
Faire figurer les coordonnées des points correspondant aux extremums avec des pointillés.

5°) On admettra que pour tout réel x on a : $f''(x) = \dfrac{6x^3-36x^2+54x-18}{(x^2-3x+3)^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de φ	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

À l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut aisément démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet trois solutions x_1, x_2, x_3 dans $\mathbb{R}$ (on prend $x_1 < x_2 < x_3$; on ne cherchera pas à calculer ces solutions).

a) En utilisant ces résultats, démontrer que $\mathcal{C}$ admet trois points d'inflexion M_1, M_2, M_3.
On ne demande pas de calculer les ordonnées de ces points.

b) Démontrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés sur la droite D d'équation $y = x - 1$.
Placer alors M_1, M_2, M_3 sur le graphique.

III. (10 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ définie sur $\mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Étudier les limites de f en 1^+ et en $+\infty$ en détaillant bien les calculs. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
Faire les traits de fractions et les radicaux à la règle.

2°) Démontrer que pour tout réel x de $\mathcal{D}$ on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

3°) Dresser un tableau récapitulatif donnant le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ avec les limites.
Ne pas oublier de mettre une double barre sous la valeur 1.

4°) Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant des valeurs approchées à 0,01 près de $f(x)$.

x	1,1	1,25	1,5	1,75	2	4
$f(x)$						

Tracer $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et <u>toutes</u> les asymptotes en prenant le centimètre pour unité graphique. On pourra observer que f est impaire.

5°) Soit E l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$. Démontrer que E est la réunion de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ ($E = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$) où $\mathcal{C}'$ est la symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

On pourra rédiger ainsi :

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

6°)* Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour axe de symétrie.

IV. (6 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$ pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ (on admettra que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq 2$).

1°) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
Tirer tous les traits de fraction à la règle.

2°) Exprimer v_n en fonction de n ; en déduire u_n en fonction de n (sous la forme d'un seul quotient).

V. (6 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Recopier et compléter sans justifier les phrases suivantes (calculs au brouillon) :

- La dérivée de f est donnée par $f'(x) =$ ……..……

- La fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ atteint en $x =$ …… .

- Ce minimum global est égal à : ……..

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = \dfrac{\ln 2}{2}$ pour axe de symétrie.

3°)* Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.

Bonus

Soit a un réel fixé.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sin(ax) - \sin\left(x^2\right)}{a - x}$.

Quelques « modèles » de rédaction pour les fonctions

1. « La fonction f est dérivable sur …. comme …. . »

2. « La fonction f est continue sur …. comme …. . »

3. « Pour tout $x \in$ … $f'(x) =$ ..... » (on peut utiliser le quantificateur $\forall$).

4. « La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y =$ …. pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ ».

Quelques remarques sur les notations

1. On prendra garde à bien noter les suites avec des parenthèses comme dans la phrase :
« La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ ».

2. Pour les limites de sommes ou de produits, il faut utiliser des parenthèses comme dans l'exemple :
« $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - 2x\right) = +\infty$ ».

3. Avant les calculs, ne pas oublier de préciser le domaine de validité. On pourra utiliser le quantificateur $\forall$ comme dans l'exemple : « $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) =$ ..... »

Corrigé du contrôle du 3 décembre 2010

I.

Attention aux parenthèses pour les limites (expressions avec parenthèses)

1°) Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

En 0, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On effectue le changement de variable : $X = 5x \Leftrightarrow \dfrac{X}{5} = x$.

$(x \to 0) \quad \Leftrightarrow \quad (X \to 0)$

$$\frac{\sin 5x}{x} = \frac{\sin X}{\frac{X}{5}} = 5\frac{\sin X}{X}$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (limite de référence)

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 5$.

2°) Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \right)$.

En + ∞, on rencontre une FI du type « 0 × ∞ ».

$X = \dfrac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2X = x$

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$$x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 2X\mathrm{e}^{-X} = 2\frac{X}{\mathrm{e}^{X}} = \frac{2}{\frac{\mathrm{e}^{X}}{X}}$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X} = +\infty$ (limite de référence)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \right) = 0$

3°) Déterminons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{2}}{x-1}$.

1ère méthode : réécriture

$$\frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{1+x^3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{(x-1)\left(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2 + x + 1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{2}\right)}$$ (on utilise l'identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$)

$$= \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{1+x^3} + \sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + x + 1\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1}\left(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{2}}{x-1} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

$\left(\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{2}}{x-1} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \right)$

2e méthode : taux de variation (méthode non rédigée)

On pose $u(x) = \sqrt{1+x^3}$.

On a : $\dfrac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{2}}{x-1} = \dfrac{u(x) - u(1)}{x-1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{u(x) - u(1)}{x-1} = u'(1)$$

$$u'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{u(x) - u(1)}{x-1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

II. $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$

1°) f est une fonction rationnelle donc d'après la règle des monômes de plus haut degré, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right) = 2$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 2$ pour asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) f est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur son ensemble de définition qui est égal à $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(4x-3)(x^2-3x+3)-(2x^2-3x)(2x-3)}{(x^2-3x+3)^2}$$
$$= \frac{(4x-3)(x^2-3x+3)-(2x^2-3x)(2x-3)}{(x^2-3x+3)^2}$$
$$= \frac{(4x^3-12x^2+12x-3x^2+9x-9)-(4x^3-6x^2-6x^2+9x)}{(x^2-3x+3)^2}$$
$$= \frac{-3x^2+12x-9}{(x^2-3x+3)^2}$$

On considère le polynôme $-3x^2+12x-9$.
Ses racines sont 1 et 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $-3x^2+12x-9$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $(x^2-3x+3)^2$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	2	↘	-1	↗	3	↘	2

3°) Déterminons les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses.

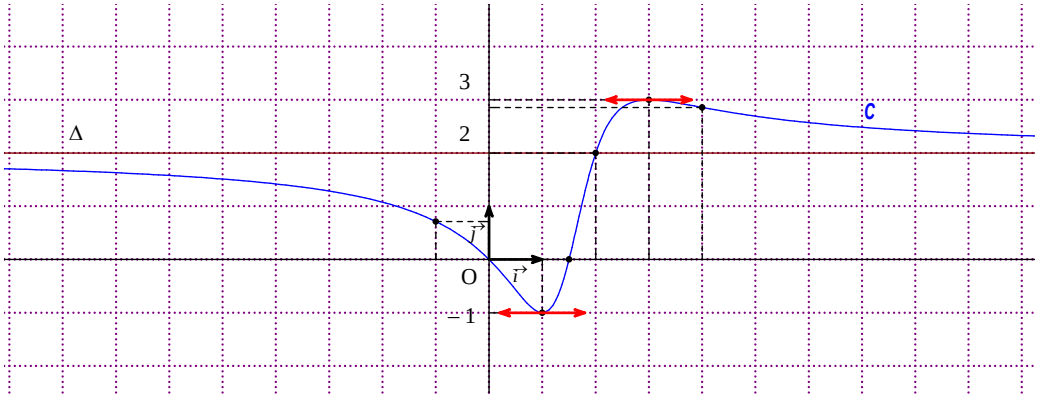
On résout l'équation $f(x) = 0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x}{x^2-3x+3} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-3x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

$\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points O et d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

4°)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{5}{7}$	0	-1	2	3	$\frac{20}{7}$



5°) a)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{6x^3-36x^2+54x-18}{(x^2-3x+3)^3} = \frac{6(x^3-6x^2+9x-3)}{(x^2-3x+3)^3} = \frac{6\varphi(x)}{(x^2-3x+3)^3}$$

Il fallait penser à factoriser le numérateur pour observer que $6x^3-36x^2+54x-18 = 6\varphi(x)$.

Le signe de $f''(x)$ est donc le même que celui de $\varphi(x)$.

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		3		x_3		$+\infty$
Variations de φ	$-\infty$	↗	0	↗	7	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	$+\infty$

On en déduit le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signes en x_1, x_2, x_3 ; on en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet les points M_1, M_2, M_3 d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 pour points d'inflexion.

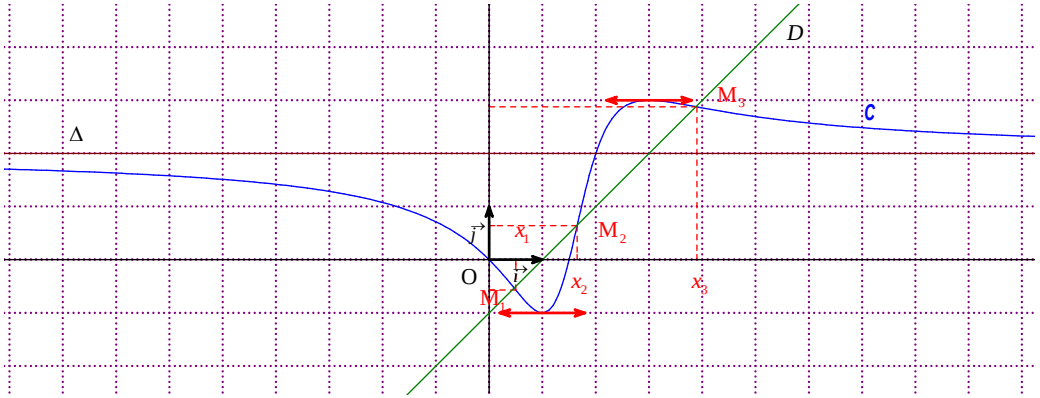
b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation $f(x) = x - 1$ (2).

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3} = x - 1 \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = (x-1)(x^2 - 3x + 3) \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = x^3 - 4x^2 + 6x - 3 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi(x) = 0
\end{aligned}$$

Or les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont x_1, x_2, x_3.

On en déduit que les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les points M_1, M_2, M_3.
On peut alors en déduire que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés sur la droite D.

Cette propriété d'alignement des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ est tout à fait remarquable.



III. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ définie sur $\mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$

1°) Étudions les limites de f en 1^+ et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite D d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc en } +\infty\text{, on rencontre une forme indéterminée du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ ».}$$

On transforme l'expression de f pour déterminer la limite.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{x}{|x| \times \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{x}{x \times \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \quad (\text{car si } x > 0\text{, alors } |x| = x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite D' d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale $+\infty$.

2°) Démontrons que pour tout réel x de $\mathcal{D}$ on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$.

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable sur $\mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$ (en effet $\forall x \in \mathcal{D}$ $x^2 - 1 > 0$).

$$\forall x \in \mathbf{D} \qquad f'(x) = \frac{1\times\sqrt{x^2-1} - x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$= \frac{1\times\sqrt{x^2-1} - x\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$= -\frac{1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{\left(x^2-1\right)\times\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

3°)

$\forall x \in \mathbf{D} \qquad f'(x) > 0$

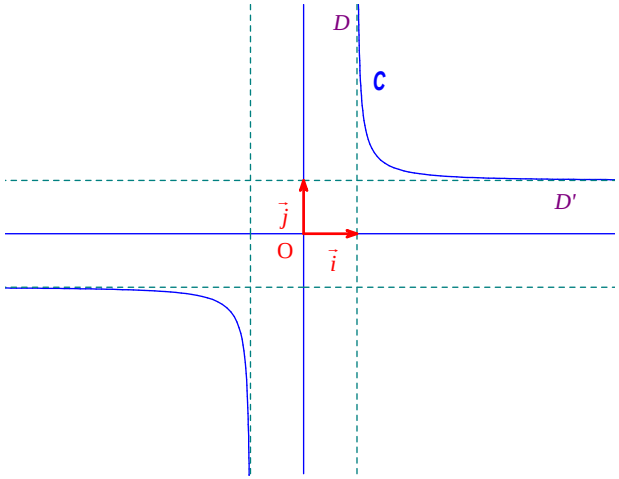
La fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles qui constituent $\mathbf{D}$.

x	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	1

4°) Tableau de valeurs

x	1,1	1,25	1,5	1,75	2	4
$f(x)$*	2,40	1,67	1,34	1,22	1,15	1,03

* valeur arrondie au centième.



5°) $E = \left\{ \mathrm{M}(x, y) \in P \,/\, x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \right\}$

Démontrons que $E = \mathbf{C} \cup \mathbf{C}'$ où $\mathbf{C}'$ est la symétrique de $\mathbf{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

On commence déjà par écrire que $\mathbf{C}'$ a pour équation $y = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2\left(x^2-1\right) - x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2\left(x^2-1\right) = x^2 \\
&\Leftrightarrow y^2\left(x^2-1\right) = x^2 \text{ et } x \in \mathbf{D} \quad * \\
&\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-1} \text{ et } x \in \mathbf{D} \\
&\Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 \text{ et } x \in \mathbf{D} \\
&\Leftrightarrow \left(y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ ou } y = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \text{ et } x \in \mathbf{D} \\
&\Leftrightarrow \left(y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ et } x \in \mathbf{D}\right) \text{ ou } \left(y = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ et } x \in \mathbf{D}\right) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{M} \in \mathbf{C} \text{ ou } \mathrm{M} \in \mathbf{C}'
\end{aligned}$$

* Le passage avec la ligne d'avant aurait nécessité un raisonnement dans les deux sens.

On en déduit que $E = \mathbf{C} \cup \mathbf{C}'$.

6°) Démontrons que $\mathbf{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour axe de symétrie.

Δ n'est pas un axe vertical.
Il n'y a donc pas de formule dans le cours pour résoudre ce type de question.

Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

On note M' son image par S_Δ.

$$\mathrm{M}'\left|\begin{array}{l} x'=y \\ y'=x \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{C}_1$ la partie de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et $\mathcal{C}_2$ la partie de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]+\infty\,;-1[$.

Si $\mathrm{M}\in\mathcal{C}_1$, alors $\begin{cases} y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & (1) \\ x>1 \\ y>1 \end{cases}$

(1) donne successivement

$$x'=\frac{y'}{\sqrt{y'^2-1}}$$
$$(x')^2=\frac{y'}{y'^2-1}$$
$$x'^2\left(y'^2-1\right)=y'$$
$$x'^2y'^2-x'^2=y'^2$$
$$x'^2y'^2-y'^2=x'^2$$
$$y'^2\left(x'^2-1\right)=x'^2$$
$$y'^2=\frac{x'^2}{x'^2-1}$$
$$y'=\sqrt{\frac{x'^2}{x'^2-1}}$$
$$y'=\frac{x'}{\sqrt{x'^2-1}}$$

Donc $\mathrm{M}'\in\mathcal{C}_1$.

On effectue la même démonstration pour $\mathcal{C}_2$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour axe de symétrie.

IV.

1°) Démontrons que la suite (v_n) est arithmétique.

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{1}{4-\dfrac{4}{u_n}-2}-\frac{1}{u_n-2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{1}{2-\dfrac{4}{u_n}}-\frac{1}{u_n-2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{u_n}{2u_n-4}-\frac{1}{u_n-2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{u_n}{2(u_n-2)}-\frac{1}{u_n-2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{u_n}{2(u_n-2)}-\frac{2}{2(u_n-2)}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{u_n-2}{2(u_n-2)}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad =\frac{1}{2}$$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

2°) Exprimons v_n en fonction de *n*.

On a : $v_0=\dfrac{1}{u_0-2}=\dfrac{1}{3-2}=1$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=1+\dfrac{n}{2}$.

Déduisons-en u_n en fonction de *n*.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{u_n-2}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad \dfrac{1}{v_n}=u_n-2$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{v_n}+2=u_n$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{n}{2}} + 2$

$$u_n = \frac{2}{2+n} + 2$$

$$u_n = \frac{2n+6}{n+2}$$

Questions supplémentaires :

J'aurais pu demander de tracer la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en prenant 5 cm pour unité graphique.
Faire apparaître les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
Que peut-on conjecturer ?

V. $f : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$

1°)

• La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}}$.

Explication :

On applique la formule de dérivation d'une fonction de la forme ln u.

On a : $\left(\mathrm{e}^{ax}\right)' = a \times \mathrm{e}^{ax}$. Donc $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' = -\mathrm{e}^{-x}$.

• La fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Explication :

On cherche le tableau de variation de f.
Pour cela on cherche le signe de la dérivée.

Le signe de $\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}$ est toujours strictement positif.
Pour étudier le signe de $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$, on résout une équation et deux inéquations.

$\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} < 0 \quad (1)$	$\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} > 0 \quad (2)$	$\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{-x}$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^x < \ln\left(2\mathrm{e}^{-x}\right)$ $\Leftrightarrow x < \ln 2 - x$ $\Leftrightarrow 2x < \ln 2$ $\Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 2}{2}$	$x > \dfrac{\ln 2}{2}$	$x = \dfrac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$f\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)$	↗	

• Ce minimum global est égal à : $m = \dfrac{3\ln 2}{2}$.

Explication :

On calcule $f\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}} + 2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}}\right)$.

$\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (on utilise la formule $\dfrac{\ln a}{2} = \ln\sqrt{a}$)

$$\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \ln\left(2\sqrt{2}\right) = \ln 2 + \ln\sqrt{2} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3\ln 2}{2}$$

2°) Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = \dfrac{\ln 2}{2}$ pour axe de symétrie.

On introduit un réel h quelconque.

On va démontrer que $f\left(\dfrac{\ln 2}{2} + h\right) = f\left(\dfrac{\ln 2}{2} - h\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln 2}{2} + h\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}+h} + 2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}-h}\right) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}} \times \mathrm{e}^h + 2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}} \times \mathrm{e}^{-h}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^h + 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\mathrm{e}^{-h}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^h + \sqrt{2}\times\mathrm{e}^{-h}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^h + \mathrm{e}^{-h}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln 2}{2} - h\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}-h} + 2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}+h}\right) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}} \times \mathrm{e}^{-h} + 2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}} \times \mathrm{e}^{h}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-h} + 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\mathrm{e}^{h}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-h} + \sqrt{2}\times\mathrm{e}^{h}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{-h} + \mathrm{e}^{h}\right)\right) \end{aligned}$$

On constate que $\forall h \in \mathbb{R} \quad f\left(\dfrac{\ln 2}{2} + h\right) = f\left(\dfrac{\ln 2}{2} - h\right)$.

Comme le repère est orthogonal, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x=\frac{\ln 2}{2}$ pour axe de symétrie.

3°) Déterminons les asymptotes à $\mathcal{C}$.

Asymptote en + ∞ :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\ln\left[e^{x}\left(1+2e^{-2x}\right)\right]=\ln e^{x}+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$$

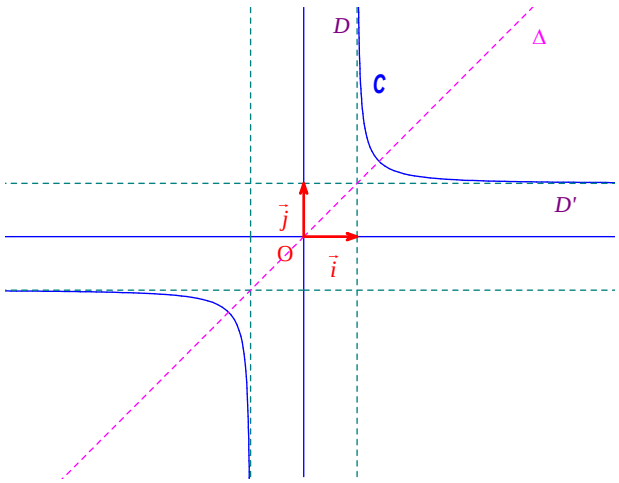
La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite D d'équation $y=x$ pour asymptote oblique en + ∞.

Asymptote en – ∞ :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\ln\left[2e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{2}+1\right)\right]=\ln 2+\ln e^{x}+\ln\left(1+\frac{e^{2x}}{2}\right)=x+\ln 2+\ln\left(1+\frac{e^{2x}}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\ln 2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{e^{2x}}{2}\right)=0$$

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite D' d'équation $y=x+\ln 2$ pour asymptote oblique en – ∞.



Bonus

Déterminons $\lim_{x\to a}\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}$ (a réel fixé).

On peut commencer par réécrire le quotient sous une autre forme : $\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=\frac{\sin(x^2)-\sin(ax)}{x-a}$.

Méthode par taux de variation :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x^2)-\sin(ax)$.

$$\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\text{car } f(a)=0$$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f s'obtient comme composée et différence de fonctions qui le sont.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2x\times\cos(x^2)-a\times\cos(ax)$$

Par définition du nombre dérivé de f en a, on peut dire que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

Donc $\lim_{x\to a}\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=2a\cos(a^2)-a\cos(a^2)=a\cos(a^2)$

Il y a une autre méthode possible en utilisant des formules de trigonométrie qui ne sont pas au programme (transformations de sommes en produit).