Exercices sur les fractions rationnelles

1 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X^4}{(X^2-4)(X+2)}$.

2 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{1}{X^4-X}$.

3 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$.

4 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{16X-32}{(X^2+2X-3)(X^2-3X+2)}$.

5 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

$F(X)=\dfrac{X^3}{X^2+X-2}$; $G(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2-1)}$; $H(X)=\dfrac{30X^2}{(X^2+X-2)(X^2+1)}$;

$K(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2+1)^2}$.

6 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^4-1)}$.

Simplifier d'abord puis donner la décomposition en éléments simples formelle de la fraction.
Calculer enfin les coefficients.

7 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{1}{X^4-1}$.

8 1°) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X+2}{X^2(X+1)}$.

2°) En déduire les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2(x+1)}$.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-8}{2x^2+2x-4}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Déterminer l'(les) asymptote(s) en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\mathcal{C}$.

10 Soit P un polynôme à coefficients complexes admettant n racines simples z_1, z_2 …, z_n dans $\mathbb{C}$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).

1°) Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{P}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

2°) En considérant la partie entière de $\dfrac{X}{P}$, démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\widetilde{P}'(z_i)}=0$.

11 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X^n(1-X)^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

12 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X^3+1}$.

Faire la vérification.

13 Soit x_1, x_1, …, x_n n réels deux à deux distincts. On pose $H=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$.

Démontrer que $\dfrac{1}{H^2}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{H'(x_i)(X-x_i)^2}-\dfrac{H''(x_i)}{H'(x_i)^3(X-x_i)}\right)$.

14 Soit P un polynôme non constant à coefficients réels scindé à racines simples.

1°) Décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$.

2°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $P''(x)P(x)\leq\left[P'(x)\right]^2$.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Soit F une fraction rationnelle dont les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de même degré.
Que vaut la partie entière de F ?

$\boxed{2}$ Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.

$\boxed{3}$ Soit F une fraction rationnelle.
Compléter la phrase :
« Si les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de même degré, alors la partie entière de F est égale à … »

$\boxed{3}$ Définition de la partie entière d'une fraction rationnelle.

$\boxed{4}$ Définition du corps des fractions d'un anneau.
Cas particulier de K[X] où K est un corps commutatif.

$\boxed{5}$ Existence et unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ par sa partie polaire et sa partie polynomiale.

Corrigés

$\boxed{1}$ $F(X)=\dfrac{X^4}{(X^2-4)(X+2)}$

$$F(X)=X-2+\frac{1}{X-2}-\frac{4}{(X+2)^2}+\frac{1}{X+2}$$

$\boxed{2}$ $F(X)=\dfrac{1}{X^4-X}$

$$F(X)=-\frac{1}{X}+\frac{1}{3(X-1)}+\frac{2X+1}{3(X^2+X+1)}$$

Détail de la démarche : $F(X)=\dfrac{1}{X(X-1)(X^2+X+1)}$

$$F(X)=\frac{A}{X}+\frac{B}{X-1}+\frac{CX+D}{X^2+X+1}$$

$$\frac{1}{X(X-1)}=\left(\frac{A}{X}+\frac{B}{X-1}\right)(X^2+X+1)+CX+D$$

On remplace X par $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ puis on fait une identification. C'est un peu « limite » mais c'est juste quand même.
On trouve ainsi les valeurs de C et D.
Finalement, on obtient :

$$F(X)=\frac{2X+1}{3(X^2+X+1)}-\frac{1}{X}+\frac{1}{3(X-1)}$$

$\boxed{3}$ $F(X)=\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$

$$F(X)=-\frac{1}{4(X+1)^2}-\frac{1}{4(X+1)}+\frac{1}{2(X^2+1)^2}+\frac{X}{4(X^2+1)}$$

(prendre X = i ou X = – i, puis X = 0)

$\boxed{4}$ $F(X)=\dfrac{16X-32}{(X^2+2X-3)(X^2-3X+2)}$

$$F(X)=\frac{4}{(X-1)^2}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+3}$$

$\boxed{5}$ $F(X)=\dfrac{X^3}{X^2+X-2}$; $G(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2-1)}$; $H(X)=\dfrac{30X^2}{(X^2+X-2)(X^2+1)}$;

$K(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2+1)^2}$.

Réponses :

$F(X)=X-1+\dfrac{8}{3(X+2)}+\dfrac{1}{3(X-1)}$; $G(X)=\dfrac{2}{(X-1)^2}-\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{X+1}$; $H(X)=\dfrac{A}{X+2}+\dfrac{B}{X-1}+\dfrac{CX+D}{X^2+1}$

C et D sont des réels. On les trouve en faisant : $(X^2+1)H(X)=(X^2+1)\left(\dfrac{A}{X+2}+\dfrac{B}{X-1}\right)+CX+D$

Puis on fait : X = i.

$H(X) = -\frac{8}{X+2} + \frac{5}{X-1} + \frac{3X+9}{X^2+1}$; on doit d'abord rendre $K(X)$ irréductible :

$K(X) = \frac{4}{(X-1)(X^2+1)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{X+1}{X^2+1} - 2\frac{X+1}{(X^2+1)^2}$

6 $F(X) = \frac{X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^4-1)}$

$F(X) = \frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)}$

$F(X) = \frac{AX+B}{X^2+1} + \frac{A'X+B'}{(X^2+1)^2} + \frac{C}{X-1}$

On trouve : $C = \frac{1}{2}$.

On fait $X = \mathrm{i}$.

$F(X)(X^2+1)^2 = (AX+B)(X^2+1) + A'X + B' + \frac{C}{X-1}(X^2+1)^2$

$\frac{X+1}{X-1} = (AX+B)(X^2+1) + A'X + B' + \frac{C}{X-1}(X^2+1)^2$

$\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1} = A'\mathrm{i} + B' = -\mathrm{i}$

On multiplie par X on fait la limite en $+\infty$.

$F(X) = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{X}{(X^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{X+1}{X^2+1}$

7 $F(X) = \frac{1}{X^4-1}$

$F(X) = \frac{1}{4(X-1)} - \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{2(X^2+1)}$

8 $F = -\frac{1}{X} + \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X+1}$

$-\ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x+1|$

9 **Méthode de division euclidienne.** On divise le polynôme X^3+3X^2-8 par le polynôme $2X^2+2X-4$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

10 1°) $\frac{1}{P} = \frac{\lambda_1}{X-z_1} + \frac{\lambda_2}{X-z_2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{X-z_n}$ avec $\lambda_1 = \frac{1}{\widetilde{P}'(z_1)}$ … $\lambda_n = \frac{1}{\widetilde{P}'(z_n)}$.

2°) partie entière de $\frac{X}{P}$ $= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ (somme des résidus)

11 Utilise des décompositions suivants les puissances croissantes.

12 On commence par décomposer dans $\mathbb{C}$.

$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{c}{X+j^2}$

Pour le calcul des résidus, on utilise les dérivées.

$a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{3j^2} = \frac{j}{3}$; $c = \frac{1}{3j} = \frac{j^2}{X+j^2}$

$F = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{1}{3}\left(\frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}\right) = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{2-X}{3(X^2-X+1)}$

13 Taylor

$H^2 = (X-x_i)^2\left[(H'(x_i))^2 + H'(x_i)H''(x_i)(X-x) + \ldots\right]$

14 1°) On pose $P = \lambda(X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_n)$.

$P = \lambda\left[(X-z_2)\ldots(X-z_n) + (X-z_1)(X-z_3)\ldots(X-z_n) + (X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_{n-1})\right]$

$\frac{P'}{P} = \frac{1}{X-z_1} + \frac{1}{X-z_2} + \ldots + \frac{1}{X-z_n}$