TS3

Contrôle du jeudi 20 janvier 2011 (1 h)

Répondre très lisiblement et sans ratures, en écrivant au stylo à plume et sans utiliser d'abréviation.
Tirer tous les traits de fraction et faire les racines carrées à la règle.

Prénom et nom : …………………………………………………….

Note :

…… /20

I. (3 points)

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de *f*.

x	$-\infty$		-3		0		1		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	–	0	+	0	–	
Variations de *f*	$-\infty$ ↗		2	↘	1	↘	-2	↗	5	↘	$-\infty$

En utilisant le tableau de variations, préciser les valeurs de *x* en lesquelles *f* atteint un extremum local et les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.
Compléter directement les phrases suivantes :

• « *f* atteint un extremum local en ………………….. ».

Noter les valeurs uniquement (ne pas utiliser d'accolades, ne pas écrire $x = \ldots$).

• « La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………… ».

• Que peut-on dire de la position de la tangente au point d'abscisse 0 et de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point ? Comment appelle-t-on cette tangente ?

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

II. (1 point)

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

On pose $g(x) = \left[f(x)\right]^2 - f(x)$.

Exprimer $g'(x)$ (donner le résultat sous forme factorisée).

$g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

III. (1 point)

Soit *u* une fonction définie et dérivable sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

On pose $v(x) = \sqrt{\left[u(x)\right]^2 + 2}$.

Exprimer $v'(x)$.

$v'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

IV. (4 points) Vrai ou faux ?

Compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est à donner.
Barème : Chaque réponse exacte rapporte un point ; chaque réponse fausse enlève un point.
L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.
$f'(x)$ est du même signe que $\left(1-x^2\right)$.

2°) Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I = [a\,;b]$ où *a* et *b* sont deux réels tels que $a < b$ telle que pour tout réel $x \in I$ $f'(x) > 0$.
Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors *f* s'annule une seule fois dans *I*.

3°) La dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ (*a* est un réel strictement positif) est la fonction $x \mapsto xa^{x-1}$.

4°) Soit *u* une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et *v* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = u\left(\mathrm{e}^x\right)$.
La fonction *v* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel *x*, on a : $v'(x) = u'\left(\mathrm{e}^x\right)$.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	Total
Réponse					

V. (2 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

On donne de plus $f(1) = -1$.

Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x > 0$. Détailler tout le raisonnement.

………...

………...

………...

………...

………...

VI. (1 point)

On considère une fonction f définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

On donne ci-dessous le tableau de signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-4		0		2		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
Préciser les points d'inflexion de $\mathcal{C}$.
Compléter la phrase : « $\mathcal{C}$ admet pour points d'inflexion les points d'abscisses ……………………………… ».

VII. (2 points)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de et a un réel appartenant à I.
On considère les énoncés suivants : P : « f est continue en a » ; Q : « f est dérivable en a ».
Indiquer sans justifier si chacune des implications dans la colonne de gauche est vraie ou fausse :

$P \Rightarrow Q$	
$Q \Rightarrow P$	

VIII. (2 points)

1°) Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un singleton.

Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs dans J (c'est-à-dire $f(I) \subset J$) et g une fonction dérivable sur J.

Compléter la phrase :

$g \circ f$ est dérivable sur …………… et $\forall x \in$ ….. $\quad (g \circ f)'(x) =$ ………………………

2°) Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un singleton.

Soit a et b deux réels tels que pour tout réel $x \in I$, $ax + b \in J$.
Soit u une fonction définie et dérivable sur J.

On note F la fonction définie sur I par $F(x) = u(ax+b)$.

Compléter la phrase :

F est dérivable sur I et $\forall x \in I \quad F'(x) =$ ……………………………

IX. (3 points)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas.

1°)	$f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^5}$	$I = \mathbb{R}$	$f'(x) =$ …………………………………………
2°)	$f(x) = \tan^3(x)$	$I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$	$f'(x) =$ …………………………………………
3°)	$f(x) = \cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$	$I = \mathbb{R}$	$f'(x) =$ …………………………………………

X. (1 point)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

Compléter :

Pour tout réel x, $f^{(3)}(x) =$ ……………………………

N.B. : $f^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de f.

Corrigé du contrôle du 20-1-2011

I.

• f atteint un extremum local en – 3, 1 et 4.

• La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses – 3, 0, 1 et 4.

• La tangente au point d'abscisse 0 est horizontale. Grâce au tableau de variations de f, on peut dire que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de cette tangente sur l'intervalle $[-3\,;0]$ et en dessous sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Il y a changement de position au voisinage du point. On dit que cette tangente est une tangente d'inflexion.

II.

$$\boxed{g'(x)=2f(x)f'(x)-f'(x)=f'(x)\big(2f(x)-1\big)}$$

III.

$$\boxed{v'(x)=\frac{2u'(x)}{2\sqrt{[u(x)]^2+1}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{[u(x)]^2+1}}}$$

IV.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)
Réponse	V	V	F	F

Justifications :

1°) $f'(x)=2\dfrac{1\times(1+x^2)-2x^2}{1+x^2}=2\times\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

2°) f est continue (car dérivable) est strictement croissante sur I (car sa dérivée est strictement positive).
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
On a $f(I)=[f(a)\,;f(b)]$.
Or $f(a)<0$ et $f(b)>0$ par hypothèse, donc $0\in f(I)$.
Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans I.

3°) $f:x\mapsto a^x$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\mathrm{e}^{x\ln a}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\ln a\times\mathrm{e}^{x\ln a}$

4°) On applique la formule de dérivation d'une composée.

$v'(x)=\mathrm{e}^x\times u'(\mathrm{e}^x)$

V.

On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	–	
$f(x)$	‖	↗	– 1	↘	

Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est égal à – 1 ; par conséquent, pour tout $x > 0$, $f(x)<0$.

VI. On regarde en quelles valeurs la dérivée seconde de f s'annule et change de signe.

x	$-\infty$		– 4		0		2		3		$-\infty$
Signe de $f''(x)$		–	0	+	0	+	0	–	0	+	

$\mathcal{C}$ admet pour points d'inflexion les points d'abscisses – 4, 2 et 3.

VII.

$P\Rightarrow Q$	**F**
$Q\Rightarrow P$	**V**

VIII.

1°) $g\circ f$ est dérivable sur I et $\forall x\in I\quad (g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'[f(x)]$

2°) F est dérivable sur I et $\forall x\in I\quad F'(x)=a\times u'(ax+b)$.

IX.

1°)	$f(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^5}$	$I=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\dfrac{20x}{(x^2+1)^6}$
2°)	$f(x)=\tan^3(x)$	$I=\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$	$f'(x)=3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$
3°)	$f(x)=\cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$	$I=\mathbb{R}$	$f'(x)=-2\sin\dfrac{x}{2}\times\cos^3\dfrac{x}{2}$

X.

Pour tout réel x, $f^{(3)}(x)=8\mathrm{e}^{2x}$