# Exercices sur les espaces vectoriels sans dimension, applications linéaires, sans famille libres ou liées

**1** Soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$.

Soit $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de E.

Soit $f$ une application linéaire de E dans F.

Démontrer que $f(E_1) = f(E_2) \Leftrightarrow E_1 + \mathrm{Ker}\, f = E_2 + \mathrm{Ker}\, f$.

**2** Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K et $f$ un endomorphisme de E.

On suppose qu'il existe un entier naturel $n \geqslant 2$ tel que $f^n = f$.

Établir que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

**3** Soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$.

Soit $f$ une application linéaire de E dans F.

Démontrer que si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a : $f(A+B) = f(A) + f(B)$.

**4** Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

1°) Soit deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$.

a) Démontrer que : $F \bigcup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour $E = F \bigcup G$.

2°) Soit $f$ et $g$ deux formes linéaires sur $E$ telles que pour tout vecteur $x$ de $E$ on ait $f(x)g(x) = 0$.

Démontrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

**5** On pose $E = \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On munit $E$ de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On note $D$ l'opérateur de dérivation sur $E$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $V$ de $E$ tel que $V \circ V = D$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un endomorphisme $V$ de $E$ tel que $V \circ V = D$.

1°) Déterminer Ker $D$.

2°) Déterminer Ker $V$.

3°) Démontrer $V \circ D = D \circ V$.

4°) Déterminer $V(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$. Aboutir à une contradiction.

**6** On note E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que l'ensemble E muni de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On pose $F = \{ f \in E \,/\, f(0) = f'(0) = 0 \}$ et l'on note G l'ensemble des fonctions affines.

1°) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2°) Démontrer que $F \oplus G = E$.

**7** Soit A, B, C, D des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel tels que :

$A + B = C + D$, $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \{0_E\}$.

Démontrer que A = C et B = D.

**8** Soit E un espace vectoriel.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$.

Soit F ' un sous-espace vectoriel de E tel que $(F \cap G) \oplus F' = F$.

A-t-on $F' \oplus G = E$ ?

**9** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

2°) Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E.

Démontrer que $G \subset F \Leftrightarrow F \bigcap (G + H) = G + (F \bigcap H)$.

**10** Soit $E$ un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

On suppose que $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(E)$ et que pour tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, on a : $f_1 \circ f_2 + f_2 \circ f_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Démontrer que $\mathcal{L}_1 = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ ou $\mathcal{L}_2 = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

# Corrigé

$\boxed{4}$ Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$.

$\forall y \in E \quad f(x+y)g(x+y)=0$

$f(x)g(y)+f(y)g(x)=0$

$\times g(y)$

$\underbrace{f(x)}_{\neq 0}g(y)^2+\underbrace{f(y)g(y)}_{0}g(x)=0$

$g(y)=0$

$\boxed{5}$

2°) On note $F$ l'espace vectoriel des fonctions constantes.
On démontre que $\text{Ker } V \subset F$.
On en déduit que $\text{Ker } V = \{0\}$ ou $\text{Ker } V = F$.
Or si $\text{Ker } V = \{0\}$, alors $V$ serait injectif et par suite $D$ serait aussi injectif ce qui n'est pas.
Donc $\text{Ker } V = F$.

4°) $V \circ D(\text{id}_{\mathbb{R}}) = D \circ V(\text{id}_{\mathbb{R}})$.

$V(1) = D \circ V(\text{id}_{\mathbb{R}})$

Donc $D \circ V(\text{id}_{\mathbb{R}})=0$ d'où $V(\text{id}_{\mathbb{R}})$ est une fonction constante.
Par suite, $V \circ V(\text{id}_{\mathbb{R}})=0$

Or : $V \circ V(\text{id}_{\mathbb{R}}) = D(\text{id}_{\mathbb{R}})=1$
On en déduit donc qu'il y a là contradiction.

$\boxed{7}$ On a déjà la moitié A $\subset$ C et B $\subset$ D.
Soit $c \in$ C et $d \in$ D.
$c + d \in$ A + B.
Il existe donc $a \in$ A et $b \in$ B tel que $c + d = a + b$.
On a donc : $\underbrace{c-a}_{\in \mathrm{C}} = \underbrace{b-d}_{\in \mathrm{D}}$.
Or C $\cap$ D = $\{0_E\}$ donc $c - a = b - d = 0_E$.
D'où $c=a$ et $b=d$.

$\boxed{8}$

Oui

Intersection réduite à 0. $\mathrm{F}' \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et $\mathrm{F}' \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{F}'$

Somme : $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$

$x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_1 \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, $x_2 \in \mathrm{F}'$, $x_3 \in \mathrm{G}$

**Solution élève Kamerling le vendredi 14-2-2014 :**

On a $\text{id}_E \in \mathcal{L}_1$ ou $\text{id}_E \in \mathcal{L}_2$.
• Supposons que $\text{id}_E \in \mathcal{L}_1$.
$\forall f_2 \in \mathcal{L}_2 \quad \text{id}_E \circ f_2 + f_2 \circ \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $2 f_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ d'où $f_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

• Supposons que $\text{id}_E \in \mathcal{L}_2$.
idem

# Questions de cours

$\boxed{1}$ Définition d'un sous-espace vectoriel.

$\boxed{2}$ Définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Propriétés des applications linéaires.

$\boxed{3}$ Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau et de l'image.

$\boxed{4}$ Isomorphisme d'espaces vectoriels. Caractère linéaire de l'application réciproque.

$\boxed{5}$ Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

$\boxed{6}$ Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Que peut-on dire pour la réunion ?
Complémentaire d'un sous-espace vectoriel.

$\boxed{7}$ Somme de deux sous-espaces vectoriels.

$\boxed{8}$ **Démontrer la propriété suivante :**
Soit $f$ est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un en espace vectoriel F.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ $n$ vecteurs de E et soit $x$ un vecteur de E.
Si $x$ est combinaison linéaire de $x_1, x_2, ..., x_n$, alors $f(x)$ est combinaison linéaire de $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$.

$\boxed{9}$ Soit $f$ est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
Que peut-on dire de $f$ si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathrm{E}}\}$ ? si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{E}$ ?

$\boxed{10}$ Soit $f$ et $g$ deux applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un en espace vectoriel F.
1°) On sait que pour tout $x \in \mathrm{E}\ \left( f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \right)$.
Quelle relation y a-t-il entre $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ ?

2°) Traduire sous la forme d'une phrase quantifiée l'inclusion $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g$.

$\boxed{11}$ Définition d'une algèbre A sur un corps commutatif.

$\boxed{12}$ Forme linéaire ; définition du dual d'un espace vectoriel. Application de E dans le bidual.

$\boxed{13}$ Ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F (les deux espaces vectoriels étant définis sur un même corps commutatif K).
Structure d'espace vectoriel.

$\boxed{14}$ Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel.