# $1^{\text{ère}}$ S — Contrôle du mercredi 25 novembre 2009 (1 h 10)

**Prénom et nom : ……………………………….**

**Note : …… / 20**

---

**I. (5 points)** Soit A et B deux points du plan *P*. On note G le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).

1°) Pour tout point M du plan *P*, exprimer $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$.

2°) Déterminer en rédigeant convenablement

- l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} \right\| = AB$ ;
- l'ensemble *F* des points M du plan *P* tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} \right\| = 3MA$.

---

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

**II. (5 points)** Soit ABC un triangle quelconque du plan *P*.
Soit $k$ un réel. On note G le barycentre des points pondérés (A ; $k - 1$), (B ; $k + 1$) et (C ; 2) lorsqu'il existe.
1°) Sans justifier les constructions, placer sur une figure les points $G_0$, $G_1$, $G_{-1}$ et $G_2$ s'ils existent (points obtenus en remplaçant successivement $k$ par 0, 1, –1 et 2).
2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG_k}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (donner l'égalité sous forme simplifiée).
3°) On note I le milieu de [AB].
Si elles existent, que peut-on en déduire pour les droites ($IG_k$) et (AC) ? Faire une démonstration.

---

**III. (5 points)** Soit ABC un triangle. On note I le symétrique de A par rapport à B et J le milieu du segment [CI].

1°) Exprimer I comme barycentre des points A et B affectés de coefficients que l'on déterminera puis le point J comme barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.

2°) Soit K le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Exprimer K comme barycentre des points B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

3°) Démontrer sans faire de calcul vectoriel que les points A, K, J sont alignés.

**Bonus :** retrouver le résultat précédent géométriquement.

---

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

**IV. (5 points)** Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu du segment [AB], J le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{JC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ et K le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BC}$.

Démontrer en utilisant les barycentres que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes en un point G que l'on définira.

---

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

# $1^{\text{ère}}$ S

# Corrigé du contrôle du 25 novembre 2009

**I.** 1°) D'après la relation fondamentale, pour tout point M du plan *P*, on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$.

2°)

Déterminons l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=AB$ ;

$M\in E$ si et seulement si $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=AB$

si et seulement si $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=AB$

si et seulement si $|3|\times\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=AB$

si et seulement si $3\times MG=AB$

si et seulement si $MG=\dfrac{AB}{3}$

*E* est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{3}$.

Déterminons l'ensemble *F* des points M du plan *P* tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3MA$.

$M\in F$ si et seulement si $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3MA$

si et seulement si $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3MA$

si et seulement si $|3|\times\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=3MA$

si et seulement si $3MG=3MA$

si et seulement si $MG=MA$

*F* est la médiatrice du segment [AG].

---

**III.**

1°) Exprimons I comme barycentre des points A et B.

I est le symétrique de A par rapport à B donc on a : $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$.
Par suite, $-\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Comme $-1+2\neq 0$, cette dernière égalité permet de dire que le point I est le barycentre des points pondérés (A ; –1) et (B ; 2).

Exprimons le point J comme barycentre des points A, B, C.

Par hypothèse, J est le milieu du segment [CI] donc J est le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (I ; 1).
Or on a démontré précédemment que I est le barycentre des points pondérés (A ; –1) et (B ; 2).
Donc, d'après la règle d'associativité du barycentre, J est le barycentre des points pondérés (A ; –1), (B ; 2) et (C ; 1).

2°) On a : $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{BC}$.
Donc K est le barycentre des points pondérés (B ; 2) et (C ; 1).

3°) Démontrons que les points A, K, J sont alignés.

On a démontré que J est le barycentre des points pondérés (A ; –1), (B ; 2) et (C ; 1) et que K est le barycentre des points pondérés (B ; 2) et (C ; 1).
D'après la règle du barycentre partiel, on peut donc dire que le point J est le barycentre des points pondérés (A ; –1) et (K ; 3).
Donc les points A, J, K sont alignés.

**N.B. :** On peut retrouver le résultat précédent géométriquement sans calcul (en utilisant la notion de centre de gravité).

---

**IV.** I est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).

J est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (C ; –3).

**Justification :**

$\overrightarrow{JC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ d'où $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.
Comme $2-3 \neq 0$, cette égalité exprime que J est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (C ; –3).

K est le barycentre des points barycentre des points pondérés (C ; –3) et (B ; 2).

**Justification :**

$\overrightarrow{KC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$ d'où $3\overrightarrow{KC} - 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.
Comme $3-2 \neq 0$, cette égalité exprime que K est le barycentre des points barycentre des points pondérés (C ; –3) et (B ; 2).

2°) Démontrons que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes au point G, barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 2), (C ; –3).

• I est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2) donc d'après la règle du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (I ; 4) et (C ; –3).
On en déduit que $G \in (CI)$.

• J est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (C ; –3) donc d'après la règle du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (J ; –1) et (B ; 2).
On en déduit que $G \in (BJ)$.

• K est le barycentre des points pondérés (C ; –3) et (B ; 2) donc d'après la règle du barycentre partiel, G est le barycentre des points pondérés (K ; –1) et (A ; 2).
On en déduit que $G \in (AK)$.

**Conclusion :**

Les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes au point G.
**IMPORTANT : utiliser le symbole $\in$.**

| |
|---|
| On peut utiliser (et c'est même conseillé car cela allège la rédaction) le symbole d'appartenance : $\in$, comme cela vient d'être fait. |

---

# Barème

I. 1°) 1 point justifié ou non

2°) ensemble E : 1,5 point pour la recherche
0,5 point pour la conclusion claire
Idem pour l'ensemble F

II. 1°) 1,5 2°) 1,5 3°) 2
III.

1°) 1 point pour I, 1 point pour J
2°) 1 point pour K
3°) 2 points

IV.
0,5 point pour exprimer I comme barycentre
0,5 point pour exprimer J comme barycentre
1 point pour exprimer K comme barycentre
1 point pour avoir posé le bon barycentre
2 points pour la fin de la l'exercice (associativité du barycentre)