TS3

Interrogation écrite du jeudi 25 novembre 2010 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : …… /20

I. (1 point) Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[A\,;+\infty[$ où A est un réel.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

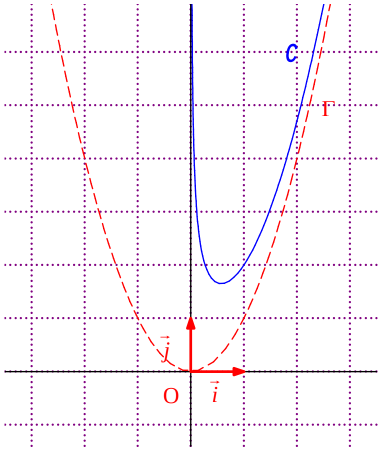
On suppose que $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$ et φ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. Que peut-on dire pour $\mathcal{C}$? Faire une phrase sans justifier.

………

………

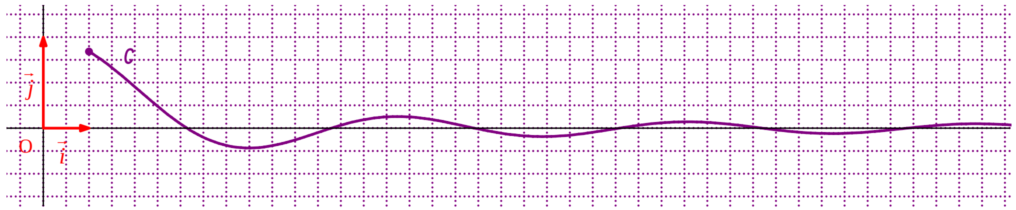
II. (1 point) On donne ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et Γ respectivement des fonctions $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x^2$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

D'après le graphique, il semble que les courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont asymptotes en $+\infty$.
Ecrire le calcul de limite qui permet de valider cette conjecture (aucune explication n'est demandée ; tout doit tenir sur une ligne).



………

III. (3 points) On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Compléter la conjecture : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots.$ Démontrer cette conjecture.

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points) Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

Compléter : $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x^2\right) = \ldots\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(e^x\right) = \ldots\ldots\ldots$.

V. (3 points) Compléter :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = \ldots\ldots\ldots \\ \\ \forall x \in \left]0\,;1\right[\quad x \ln x \;\ldots\; 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x \ln x} = \ldots\ldots\ldots$$

VI. (1 point) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire la proposition : « (u_n) est à termes strictement positifs » sous la forme d'une phrase quantifiée.

………

VII. (5 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $2u_{n+1} = 3 - u_n$. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 1$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique (chercher d'abord une solution au brouillon).

Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de *n*. Rédiger brièvement.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VIII. (1 point) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{3}$.

On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Donner une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* (sous forme factorisée). Écrire une seule égalité sans justifier.

……………………………………………………………………………………………………

IX. (2 points) On considère la fonction polynôme *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x - 3$.

On démontre aisément que la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le corollaire du théorème des valeurs permet alors d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ (on ne peut pas résoudre cette équation de manière exacte).

Voici le début d'une démarche permettant de déterminer des encadrements de α de plus en plus précis.

On a : $f(1) = -1$ et $f(2) = 31$. On a donc $1 < \alpha < 2$.

On a : $f(1) = -1$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 6{,}09375$ d'où $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

On a : $f(1) = -1$ et $f\left(\frac{5}{4}\right) = 1{,}30175...$ d'où $1 < \alpha < \frac{5}{4}$.

1°) Comment s'appelle cette méthode ?

2°) Poursuivre la démarche pour obtenir un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{8}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 25-11-2010

I. La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique en + ∞.

II.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$

III.

D'après le graphique, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Démonstration :

$\forall x \in [1 ; +\infty[\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\forall x \in [1 ; +\infty[\quad -\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ $\qquad : x \ (x > 0)$

On pose $u(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\forall x \in [1 ; +\infty[\quad u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0 \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

IV. On utilise la propriété pour la limite d'une composée.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x^2\right) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\mathrm{e}^x\right) = 4$

V.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0 \\ \forall x \in]0 ; 1[\quad x \ln x < 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x \ln x} = -\infty$.

VI. « (u_n) est à termes strictement positifs » signifie que ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$).

VII.

• Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{3 - u_n}{2} - 1 \\ &= \frac{3 - u_n - 2}{2} \\ &= \frac{1 - u_n}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 1) \\ &= -\frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$.

• Exprimons alors v_n puis u_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n &= v_0 \times q^n \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 1$.

VIII. $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S_n = 3\left[1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ (formule sommatoire pour les suites géométriques)

IX. 1°) Cette méthode s'appelle la **méthode de dichotomie** (à ne pas confondre avec la méthode de balayage).
C'est une méthode algorithmique.
Intérêt de cette méthode : On peut écrire un algorithme puis faire un programme.

2°) On souhaite obtenir un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{1}{8}$.

On a : $f\left(\dfrac{9}{8}\right) = -0{,}0729675$ et $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = 1{,}3017578$ d'où $\dfrac{9}{8} < \alpha < \dfrac{5}{4}$.