TS — Exercices sur le raisonnement par récurrence

Dans tous les exercices, on veillera à respecter scrupuleusement le protocole des récurrences.

---

1 On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n < 4$.

On rappelle ci-dessous les **étapes à respecter**.

Début :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « ……………………………. ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

……………………………………………………………………

Hérédité :

Considérons un entier naturel $k \geq 0$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire …………………….

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire…………………………………..

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geq 0$, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

2 On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

3 On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

4 On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (n+1)^2$.

5 On considère la suite u définie par la valeur de son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

6 On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 4$ pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3^n - 2$.

Le but des exercices **7** à **9** est de démontrer des **formules sommatoires** par récurrence.

---

7 Pour tout entier naturel p, on pose $u_p = 2^p$.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$.

On observera que l'on a : $S_{n+1} = \sum_{p=0}^{p=n+1} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_p + u_{n+1}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $S_n = 2^{n+1} - 1$.

8 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 0 + 1 + 2 + ... + n = \sum_{p=0}^{p=n} p$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

9 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \sum_{p=0}^{p=n} p^3$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

10 On considère l'énoncé suivant :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

La démonstration est donnée dans l'encadré ci-dessous.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par 3 ».

Initialisation :
Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 3$ donc $4^0 - 1$ est divisible par 3.
On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :
Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Puisque $P(k)$ est vraie, il existe un entier naturel q tel que $4^k - 1 = 3q$.
On a alors $4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = (3+1) \times 4^k - 1 = 3 \times 4^k + 4^k - 1 = 3 \times 4^k + 3 \times q = 3\left(4^k + q\right)$.

On remplace 4 par 3 + 1

Or $4^k + q$ est un entier naturel donc on en déduit que $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3 et, par suite, que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

On en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Commentaire :

On peut être un peu surpris par cette récurrence car la propriété à démontrer n'est pas formulée sous la forme d'une égalité ou d'une inégalité mais sous la forme d'une phrase en français.

Adapter la démonstration précédente pour démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Autre méthode :

On utilise la formule sommatoire $1 + q + ... + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ qui donne l'identité algébrique :
$(q-1)\left(1 + q + ... + q^{n-1}\right) = q^n - 1$.
En appliquant cette identité pour q = 10, retrouver le résultat précédent.

11 On considère une fonction f définie sur l'intervalle I = [1 ; 5] dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	1	5
Variation de f	2	4

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq 5$.
2°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.

12 On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

On sait que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, la fonction dérivée n-ième de f a pour expression $f^{(n)}(x) = 3^n \mathrm{e}^{3x}$.

13 On considère une phrase $P(n)$ portant sur un entier naturel n telle que, si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors la phrase $P(k+1)$ l'est également.

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que la phrase $P(n_0)$ soit vraie.
Quelles conclusions peut-on déduire avec certitude ?

(1) $P(n_0 + 1)$ est vraie.
(2) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.
(3) $P(n_0 - 1)$ est fausse.
(4) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \leq n_0$
(5) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

14 **Que peut-on penser du raisonnement suivant ?**

Pour n entier naturel tel que $n \geq 2$, on définit la phrase
$P(n)$: « n points quelconques du plan sont toujours alignés ».
Vérifions que la phrase $P(2)$ est vraie.
Deux points du plan sont toujours alignés donc la phrase $P(2)$ est vraie.

Considérons un entier naturel $k \geq 2$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Soit A_1, A_2, A_3,..., A_{k+1} $k+1$ points du plan.
D'après la phrase $P(k)$, les k premiers points A_1, A_2, A_3,..., A_k sont alignés sur une droite Δ et de même les k points A_2, A_3,..., A_{k+1} sont alignés sur une droite Δ'.
Les droites Δ et Δ' sont confondues car elles ont les points A_2, A_3,..., A_k en commun.
Les k + 1 points A_1, A_2, A_3,..., A_{k+1} sont donc alignés sur Δ.
Par conséquent, la phrase $P(k+1)$ est vraie.

On a démontré que $P(2)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geq 2$, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

$\boxed{\textbf{15}}$ On considère la fonction *f* sur $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On sait que *f* est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, la fonction dérivée *n*-ième de *f* a pour expression $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

$\boxed{\textbf{16}}$ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $\sum_{p=0}^{p=n} p \times p! = (n+1)! - 1$.

$\boxed{\textbf{17}}$ On considère la suite *u* définie par la valeur de son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$.

Corrigé

$\boxed{1}$ Dans la partie déductive, on procède à un « élargissement » de l'encadrement. On peut toujours élargir un encadrement mais on ne peut pas le rétrécir. On a le droit d'élargir un encadrement d'un seul côté comme c'est le cas ici.

Dans l'hérédité, on utilise la relation de récurrence qui définit la suite.

Solution détaillée :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $0 \leq u_n < 4$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 0$ par hypothèse (définition de la suite) donc $0 \leq u_0 < 4$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $0 \leq u_k < 4$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $0 \leq u_{k+1} < 4$.

On a : $0 \leq u_k < 4$.
Donc $12 \leq u_k + 12 < 16$
Donc $\sqrt{12} \leq \sqrt{u_k + 12} < \sqrt{16}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Par suite, $0 \leq u_{k+1} < 4$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{2}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 4$ par hypothèse (définition de la suite) donc $u_0 > 1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.
On a : $u_k > 1$
Donc $\sqrt{u_k} > \sqrt{1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Par suite, $u_{k+1} > 1$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{3}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = \frac{1}{4}$ par hypothèse de définition de la suite donc $0 < u_0 < 1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

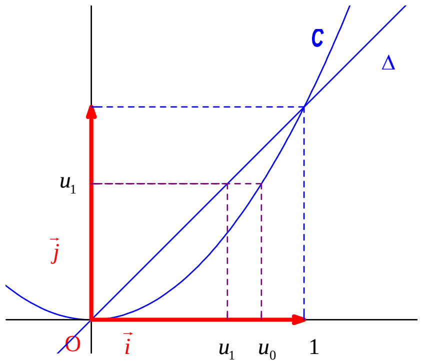
Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $0 < u_k < 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < 1$.

On a : $0 < u_k < 1$
Donc $0^2 < (u_k)^2 < 1^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Par suite, $0 < u_{k+1} < 1$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.



$\boxed{4}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = (n+1)^2$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 1$ par hypothèse donc $u_0 = (0+1)^2$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = (k+1)^2$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = (k+2)^2$.

On a : $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$

Or par hypothèse de récurrence, $u_k = (k+1)^2$ donc

$u_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3$

D'où $u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$

Par suite, $u_{k+1} = k^2 + 4k + 4$

Donc $u_{k+1} = (k+2)^2$.

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{5}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 0$ par hypothèse donc $u_0 = \dfrac{0}{0+1}$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = \dfrac{k}{k+1}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$ (pour écrire cela, on peut, si on veut poser $k' = k+1$).

On a : $u_{k+1} = \dfrac{1}{2 - u_k}$

Or par hypothèse de récurrence, $u_k = \dfrac{k}{k+1}$ donc

$$u_{k+1} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{k}{k+1}}$$

D'où $u_{k+1} = \dfrac{1}{\dfrac{k+2}{k+1}}$

Par suite, $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{6}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = 3^n - 2$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = -1$ par hypothèse donc $u_0 = 3^0 - 2$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = 3^k - 2$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$.

On a : $u_{k+1} = 3u_k + 4$

Or par hypothèse de récurrence, $u_k = 3\left(3^k - 2\right) + 4$ donc $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Les exercices $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ ont pour but de démontrer des **formules sommatoires** par récurrence.

7 On peut retrouver le résultat directement en utilisant la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Dans cet exercice, on doit calculer $S_0 = u_0 = 2^0 = 1$ contrairement aux exercices précédents.
On retrouve le même genre de démarche dans les exercices suivants.

Solution détaillée :

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $S_n = 2^{n+1} - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $S_n = 2^{n+1} - 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$S_0 = u_0 = 2^0 = 1$ par hypothèse donc on peut écrire $S_0 = 2^{0+1} - 1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k = 2^{k+1} - 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = 2^{k+2} - 1$.

On a : $S_{k+1} = \sum_{p=0}^{p=k+1} u_p = \sum_{p=0}^{p=k} u_p + u_{k+1}$ soit $S_{k+1} = S_k + u_{k+1}$

Or par hypothèse de récurrence, $S_k = 2^{k+1} - 1$.
Donc $S_{k+1} = \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1}$.
Par conséquent, $S_{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1$
soit $S_{k+1} = 2^{k+2} - 1$.

On peut donc écrire avec l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1}. \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

8 **Formule sommatoire donnant la somme des entiers de 0 à *n***

On peut retrouver le résultat directement en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique.

Pour l'hérédité, il y a deux méthodes :
- on peut partir de $S_{k+1} = S_k + (k+1)$.

Cette relation traduit tout simplement que la somme de tous les entiers de 0 à $k+1$ est égale à la somme de tous les entiers de 0 à k plus $k+1$.

- on peut aussi commencer par $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ et ajouter $k+1$ aux deux membres.

N.B. : Contrairement à l'exercice précédent, on n'a pas défini de suite (u_n).

Solution détaillée :

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$S_0 = 0$ donc on peut écrire $S_0 = \dfrac{0 \times (0+1)}{2}$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a : $S_{k+1} = S_k + (k+1)$.

(En effet, la somme des entiers de 0 à $k+1$ est égale à (la somme des entiers de 0 à k) + $(k+1)$; on n'a pas défini de suite contrairement à l'exercice précédent).

$S_{k+1} = 0 + 1 + 2 + ... + (k+1)$
$S_k = 0 + 1 + 2 + ... + k$

Exemple :

$S_{100} = 0 + 1 + 2 + ... + 100$
$S_{99} = 0 + 1 + 2 + ... + 99$

$S_{100} = S_{99} + 100$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} && \text{(on met au même dénominateur)}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && \text{(on factorise)}
\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Commentaire :

On a établi par récurrence la formule sommatoire suivante donnant la somme des cubes des entiers de 0 à n :

$$0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Cette formule sommatoire pouvait être établie sans utiliser de récurrence en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$\boxed{9}$ Formule sommatoire donnant la somme des cubes des entiers de 0 à n

$$S_n=0^3+1^3+2^3+...+n^3=\sum_{p=0}^{p=n} p^3$$

Dans la partie « hérédité », on assiste au « miracle de la récurrence ».

Remarque : Il est conseillé d'apprendre par cœur le résultat : $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On peut observer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p^3=\left(\sum_{p=0}^{p=n} p\right)^2$.

Solution détaillée :

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$S_0=0$ donc on peut écrire $S_0=\dfrac{0^2\times(0+1)^2}{4}$.

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k=\dfrac{k^2\times(k+1)^2}{4}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

On a : $S_{k+1}=S_k+(k+1)^3$.

En effet, la somme des cubes des entiers de 0 à $k+1$ est égale à :

(la somme des cubes des entiers de 0 à k) + $(k+1)^3$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\
&= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}\\
&= \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}\\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}\\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Commentaire :

On a établi par récurrence la formule sommatoire suivante donnant la somme des cubes des entiers de 0 à n :

$$0^3+1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On observe que pour la somme des cubes on obtient une expression de degré 4 en n (la somme des cubes des entiers de 0 à n donne un résultat de degré 4) : si on développe l'expression du second membre, on obtient un terme n exposant 4 qui sera le terme de plus haut degré.

Dans l'exercice précédent, on a établi la formule sommatoire suivante :

$$0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

En comparant les deux formules sommatoire suivantes,

$$\sum_{p=0}^{p=n} p=\frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{p=0}^{p=n} p^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

on constate que l'on peut mettre en relation la somme des entiers de 0 à n et la somme des cubes des entiers de 0 à n de la manière suivante :

$$\sum_{p=0}^{p=n} p^3=\left(\sum_{p=0}^{p=n} p\right)^2.$$

c'est-à-dire que la somme des cubes des entiers naturels de 0 à n est égale au carré de la somme des entiers de 0 à n.

Ce résultat n'est pas « logique » (au sens où il ne pouvait pas être déduit directement).

La déduction est faite à partir des formules sommatoires qui ont été établies.

Remarques :

1. La **remarque sur le degré** de l'expression obtenue est généralisable :

La somme des entiers naturels de 0 à n donne une expression de degré 2.
La somme des carrés des entiers naturels de 0 à n donne une expression de degré 3.
La somme des cubes des entiers naturels de 0 à n donne une expression de degré 4.
La somme des puissances 4 des entiers naturels de 0 à n donne une expression de degré 5 etc.

2. Il n'y a pas de formule sommatoire donnant la somme des carrés, des cubes des termes consécutifs d'une suite quelconque.
Les formules trouvées sont propres aux sommes des n premiers entiers et des cubes des n premiers entiers naturels.

Dans les exercices $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, on ne pose pas forcément $S_n=$........... .
Les exercices peuvent être rédigés de la manière suivante :

$\boxed{7}$ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p=2^{n+1}-1$.

$\boxed{8}$ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p=\frac{n(n+1)}{2}$.

$\boxed{9}$ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$\boxed{10}$ Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « 10^n-1 est divisible par 9 ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$10^0-1=1-1=0=0\times 9$ donc 10^0-1 est divisible par 9.
On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Puisque $P(k)$ est vraie, il existe un entier naturel q tel que $10^k-1=9q$.
On a alors $10^{k+1}-1=10\times 10^k-1=(9+1)\times 10^k-1=9\times 10^k+10^k-1=9\times 10^k+9\times q=9\left(10^k+q\right)$.
Or 10^k+q est un entier naturel donc on en déduit que $10^{k+1}-1$ est divisible par 9 et, par suite, que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Il faut être capable de refaire le raisonnement sans indication.

Exercice personnel :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

Cette propriété est généralisable. On peut démontrer que si a est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors pour tout entier naturel n, a^n-1 est divisible par $a-1$.

Autre méthode :

On part de la formule sommatoire $1+q+...+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ pour $q\neq 1$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On obtient l'égalité : $(1-q)\left(1+q+...+q^{n-1}\right)=1-q^n$.

En multipliant les deux membres par – 1*, on obtient l'égalité : $(q-1)\left(1+q+...+q^{n-1}\right)=q^n-1$.

En remplaçant q par 10 dans l'égalité précédente (c'est-à-dire en faisant q = 10), on obtient :

$(10-1)\left(1+10+...+10^{n-1}\right)=10^n-1$

soit $9\times\left(1+10+...+10^{n-1}\right)=10^n-1$

Or $1+10+...+10^{n-1}$ est un entier naturel.

Donc on en déduit que 10^n-1 est divisible par 10.

* On peut présenter la démarche avec une flèche :

$$\begin{array}{l} (1-q)\left(1+q+...+q^{n-1}\right)=1-q^n \\ \qquad\qquad\Big\downarrow \times(-1) \\ (q-1)\left(1+q+...+q^{n-1}\right)=q^n-1 \end{array}$$

$\boxed{\textbf{11}}$ 2°) Utiliser $u_1=f(u_0)=f(1)=2$ d'après le tableau de variations.

Solution détaillée :

x	1	5
Variation de f	2 ↗	4

1°) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1\leq u_n\leq 5$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $1\leq u_n\leq 5$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0=1$ d'après la définition de la suite.

On a donc $1\leq u_0\leq 5$.

On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $1\leq u_k\leq 5$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $1\leq u_{k+1}\leq 5$.

.

Puisque $P(k)$ est vraie, on a : $1\leq u_k\leq 5$.

Or f est croissante sur l'intervalle I (qui est défini par I = [1 ; 5]), donc $f(1)\leq f(u_k)\leq f(5)$ soit $2\leq u_{k+1}\leq 4$.

Par conséquent, $1\leq u_{k+1}\leq 5$.

Conclusion :

On en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2°) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n\leq u_{n+1}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P'(n)$: « $u_n\leq u_{n+1}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P'(0)$ est vraie.

$u_0=1$ d'après la définition de la suite.

$u_1=f(u_0)=f(1)=2$.

On a donc $u_0\leq u_1$.

On en déduit que $P'(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P'(k)$ soit vraie.

Démontrons qu'alors la phrase $P'(k+1)$ est vraie.

Puisque $P'(k)$ est vraie, on a : $u_k\leq u_{k+1}$.

Or f est croissante sur l'intervalle [1 ; 5], donc $f(u_k)\leq f(u_{k+1})$ soit $u_{k+1}\leq u_{k+2}$.

Donc la phrase $P'(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

La phrase $P'(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{\textbf{12}}$ Utiliser $f^{(k+1)}=\left[f^{(k)}\right]'$.

Solution détaillée :

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, la fonction dérivée n-ième de f a pour expression $f^{(n)}(x)=3^n\mathrm{e}^{3x}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $f^{(n)}(x)=3^n\mathrm{e}^{3x}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$f^{(0)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^{3x}$; or $3^0\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}$ donc $f^{(0)}(x)=3^0\mathrm{e}^{3x}$.

On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Puisque $P(k)$ est vraie, $f^{(k)}(x)=3^k e^{3x}$.
En dérivant, on obtient l'égalité $\left(f^{(k)}\right)'(x)=3^k\times 3e^{3x}$
D'où $f^{(k+1)}(x)=3^{k+1}e^{3x}$ et donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{13}$ On peut affirmer avec certitude que les propositions (1) et (2) sont vraies.
En revanche, on ne peut rien dire pour les propositions (3), (4) et (5) sont vraies.

En particulier, pour la proposition (5) : « $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ » car on ne sait pas si la phrase $P(0)$ est vraie.

$\boxed{14}$ Cet exercice repose sur une imprécision de l'énoncé :

Les k points peuvent être distincts ou confondus.

Rappel : des points confondus sont « forcément » alignés.

Dans la partie hérédité, dire que « Δ et Δ' sont confondues car elles ont les points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ en commun » est faux.
En effet, les points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ peuvent tous être confondus auquel cas on ne peut absolument pas en déduire que les droites Δ et Δ' sont confondues.

$\boxed{15}$ Même astuce de départ qu'à l'exercice $\boxed{12}$.

Solution détaillée :

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, la fonction dérivée n-ième de f a pour expression $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$f^{(0)}(x)=f(x)=\dfrac{1}{x}$; or $\dfrac{(-1)^0\times 0!}{x^{0+1}}=\dfrac{1}{x}$ donc $f^{(0)}(x)=\dfrac{(-1)^0\times 0!}{x^{0+1}}$.
On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Puisque $P(k)$ est vraie, $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k\times k!}{x^{k+1}}$.
En dérivant, on obtient l'égalité $\left(f^{(k)}\right)'(x)=(-1)^k\times k!\times\left(-\dfrac{k+1}{x^{k+2}}\right)$.

On utilise la formule de dérivation suivante : $\left(\dfrac{1}{x^k}\right)' = -\dfrac{k}{x^{k+1}}$.

D'où $f^{(k+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{k+1}\times(k+1)!}{x^{k+2}}$ et donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{16}$ Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p\times p!=(n+1)!-1$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p\times p!=(n+1)!-1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
On a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=0} p\times p!=0\times 0!=0$.
Or $(0+1)!-1=1-1=0$.
Donc on peut écrire $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=0} p\times p!=(0+1)!-1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=k} p\times p!=(k+1)!-1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=k+1} p\times p!=(k+2)!-1$.

On a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=k+1} p\times p!=\sum_{p=0}^{p=k} p\times p!+(k+1)\times(k+1)!$.

$$\sum_{p=0}^{p=k+1} p\times p! = (k+1)!-1+(k+1)\times(k+1)! \quad \text{(on utilise l'hypothèse de récurrence)}$$

$$= (k+1)!+(k+1)\times(k+1)!-1$$

$$= (k+1)!\left[1+(k+1)\right]-1 \quad \text{(on factorise par } (k+1)\text{ ! les deux premiers termes de la somme)}$$

$$= (k+1)!(k+2)-1$$

$$= (k+2)!-1$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{17}$ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 3$ par hypothèse de définition de la suite donc $u_0 > 1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

On a : $u_{k+1} = \dfrac{4u_k - 2}{u_k + 1}$.

Méthode : Pour comparer u_{k+1} et 1, on va utiliser la méthode par différence c'est-à-dire que l'on va démontrer que $u_{k+1} - 1 > 0$. En effet, il n'y a pas de règle concernant le quotient pour les inégalités. Il n'y a ici

$$u_{k+1} - 1 = \frac{4u_k - 2}{u_k + 1} - 1$$

$$= \frac{4u_k - 2 - (u_k + 1)}{u_k + 1}$$

$$= \frac{4u_k - 2 - u_k - 1}{u_k + 1}$$

$$= \frac{3u_k - 3}{u_k + 1}$$

$$= \frac{3(u_k - 1)}{u_k + 1}$$

Or par hypothèse de récurrence, $u_k > 1$ donc $u_k - 1 > 0$ et de manière évidente $u_k + 1 > 0$.

On en déduit que $u_{k+1} - 1 > 0$ (d'après la règle des signes : le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positifs).

Par conséquent, $u_k > 1$ et $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Commentaires

• L'initialisation de certaines récurrences nécessite un calcul ; d'autres non.

Dans les exercices **1** , **2** , **3** , l'initialisation ne nécessite pas de calcul.

Dans les exercices **4** et **5** , l'initialisation nécessite un calcul.

• Dans la partie sur l'hérédité, « On travaille avec $k + 1$. »

• À l'intérieur de la récurrence pour les sommes, on utilise les techniques algébriques usuelles : technique de factorisations, développements, mises au même dénominateur.

Classification des exercices

• Démonstration d'une inégalité

• Démonstration d'une égalité

• Démonstration d'une formule sommatoire

• Démonstration de divisibilité