1ère S

Tangente à la courbe d'une fonction (approche expérimentale)

Objectif du chapitre :

Les mathématiciens connaissent depuis l'antiquité la notion de tangente à un cercle.
Pour diverses raisons, notamment en lien avec la physique, à partir du XVIIe siècle, les mathématiciens se sont intéressés au tracé de la tangente en un point pour d'autres courbes que des cercles.
Leurs travaux sur les tangentes ont permis de définir la tangente à des courbes autres que des cercles, par exemple des paraboles, des hyperboles etc. Ils ont aussi débouché sur une notion essentielle en mathématiques dans l'étude d'une fonction qui va être étudiée dans les chapitres suivants.

Dans ce chapitre, nous allons reprendre certaines de leurs méthodes pour commencer à dégager quelques idées intuitives qui mènent à la notion de tangente.

Dans ce chapitre, nous ne ferons aucun calcul, nous nous contenterons d'observer et de comprendre ce qui se passe, sans pousser davantage.

Ce chapitre est une première approche de la notion de tangente.
On a privilégié une approche expérimentale conduisant à formuler des conjectures qui seront démontrées dans le chapitre suivant.

Cette étude sera poussée davantage dans les chapitres suivants.

Objectifs du chapitre :

- définir de manière expérimentale la notion de tangente
- amorcer une étude algébrique.

I. Le mot « tangente » a plusieurs sens

1°) C'est un nom commun.

- **tangente à un cercle**
- **tangente d'un angle dans un triangle rectangle** (ce n'est pas cela qui va nous intéresser dans ce cours).

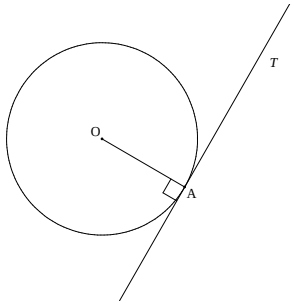
2°) C'est un adjectif.

On dit qu'un cercle est **tangent** à une droite ou qu'une droite est tangente à un cercle.
On dit que deux cercles sont **tangents** l'un à l'autre (extérieurement ou intérieurement).

II. La tangente à un cercle

1°) Définition (rappel)

La tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon en ce point.



2°) Tracé de la tangente à un cercle avec papier - crayon

Instruments utilisés : règle non graduée et équerre.

3°) Propriété caractéristique

La tangente à un cercle ne coupe celui-ci qu'en un seul point.

Attention : il n'y a pas de zone de contact ou d'intersection.

La notion de tangente est utile en mathématique pour préciser la position d'une droite par rapport à un cercle.

4°) Vocabulaire

« point de contact » = « point de tangence »

5°) Origine du mot « tangente »

Tangente < *tangere* en latin qui signifie **« toucher »**
Au XVIIe siècle, on ne parlait pas de tangente mais de **« touchante »**.

III. Tangente à une courbe qui n'est pas un cercle

1°) Obstacles et difficultés

On va considérer une courbe bien connue et importante en mathématiques : la parabole représentative de la fonction carrée (nous ne ferons aucun calcul dans ce chapitre).

Ce qui change entre un cercle et une parabole.
Problème du passage de la tangente à un cercle à la tangente à une parabole.
La définition ne peut pas être adaptée aisément.

La définition de la tangente à un cercle se révèle insuffisante pour définir la tangente à d'autres courbes que des cercles. De même que la propriété caractéristique.

Il faut trouver autre chose.

2°) L'idée de Fermat : « les droites qui tournent » ; mise en œuvre d'une démarche dynamique

Nous allons décrire dans ce chapitre une démarche originale et un peu déroutante de prime abord, due au mathématicien Pierre de Fermat (XVIIe siècle). Cette démarche n'aura pas à être refaite en exercice.

L'idée de Fermat : créer un point mobile M proche de A, tracer la droite (AM), faire bouger M sur la courbe de manière à faire se rapprocher M de A (ce qui a pour effet de faire tourner la droite (AM) autour du point A).

IV. Mise en œuvre de l'idée de Fermat

1°) Utilisation d'une règle non graduée

On travaille avec papier – crayon.

Cette méthode est approximative.

2°) Utilisation d'un LGD*

On travaille sur ordinateur.

J'ouvre deux fenêtres *Geogebra*.

Pour un cercle	Pour une parabole
Dans le plan	Dans le plan muni d'un repère
Perpendiculaire au rayon en un point Visualisation avec *Geogebra*	? Une parabole n'a ni centre ni rayon
Droite qui coupe le cercle en un seul point Visualisation avec *Geogebra* aussi	Droite qui coupe la courbe en un seul point Problème : non généralisable à d'autres courbes
Position limite des sécantes Visualisation avec *Geogebra* Création de la droite mobile (« droite qui tourne »)	Position limite des sécantes Intérêt : généralisable à toutes les autres courbes Visualisation avec *Geogebra* (« droite qui tourne »)

Pour la tangente à un cercle, je cache les axes du repère.

Visualisation de la commande « Tangente[A,f] » avec *Geogebra*.
Lorsque le point M se rapproche du point A, l'angle entre la droite (AM) et la tangente diminue.

En un autre point, par exemple au point O, quelle est la tangente ?

La méthode s'adapte pour d'autres courbes (par exemple, l'hyperbole représentative de la fonction inverse).

V. Observation de la courbe de la fonction carrée

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction carrée dans un repère.

1°) Tangente au point O

On place un point M sur la courbe $\mathcal{C}$ distinct de O.
On trace la droite (OM).
On voit bien que la droite (OM) n'est pas tangente à la courbe.

On observe la droite (OM) lorsque M se rapproche de O par la gauche, par la droite.
Mise en évidence d'une position limite : l'axe des abscisses.
Description de la zone arrondie au sommet de la parabole.

2°) Tangente en un point A autre que O

On va prendre par exemple A(1 ; 1).

On place un point M sur la courbe $\mathcal{C}$ distinct de A.
On trace la droite (AM).
On voit bien que la droite (AM) n'est pas tangente à la courbe.

On observe la droite (AM) lorsque M se rapproche de A par la gauche, par la droite.
Mise en évidence d'une position limite.

Description de la position de (AM) par rapport à la courbe (au-dessous, au-dessous, sécante).

Nous admettrons qu'en tout point A de la parabole, il existe une position limite de la droite (AM) lorsque M se rapproche de plus en plus de A, sans jamais être confondu avec A.
Cette position limite est appelée la **tangente** en A à la courbe.
Cette droite ne peut pas être désignée par deux points (le point A et un autre point de la courbe).
On la désignera par une seule lettre : *T*.

3°) Généralisation

Nous admettrons qu'en tout point A de la parabole il existe une tangente.
Nous admettrons que cela reste valable pour toutes les courbes des fonctions de référence étudiées en seconde (fonctions linéaires, affines, carré et inverse) ainsi que pour les courbes des fonctions que nous étudierons cette année.
Nous approfondirons cette notion dans les chapitres suivants. En particulier, nous verrons le tracé précis des tangentes.

VI. Mise en forme de quelques idées

1°) Notion de sécante

Définition

A et B sont deux points quelconques distincts sur une courbe $\mathcal{C}$.

La droite (AB) est appelée une **sécante** à la courbe.
On dit aussi que (AB) est une **corde**.

2°) Quelques remarques simples

A est un point fixé d'une courbe $\mathcal{C}$.
M est un point mobile de $\mathcal{C}$.

Lorsque M se rapproche de A, on peut observer :

- que la distance AM diminue
- on peut observer la position de la courbe par rapport à la droite (AM)

Une première idée à noter vraiment dans le cours :
Plus le point M est proche de A, plus la droite (AM) est « proche » de la courbe au voisinage de A.

3°) Définition provisoire de la tangente à une courbe

La tangente en A est la position limite des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de plus en plus de A.

Corrélativement, la tangente va apparaître comme la droite qui est « la plus proche » de la courbe au voisinage du point en lequel elle est tangente.

Cette idée est renforcée par l'observation de **« zooms »** successifs au voisinage du point A.
La courbe devient quasiment une droite ; on peut la tracer. Puis en dézoomant, cette droite reste à l'écran. C'est la tangente.
On peut observer la **zone** autour du point A.

4°) Vocabulaire

Le vocabulaire de **point de contact** et de **point de tangence** vu pour un cercle reste valable pour une courbe quelconque.

VII. Enveloppe des tangentes

Utilisation d'un LGD*
Mode trace activée.
J'« efface » la courbe.

La courbe apparaît comme l'enveloppe de ses tangentes.

Reconstitution d'une courbe à partir de ses tangentes.

La courbe est toujours au-dessus de ses tangentes

VI. Retour sur le cas de la courbe de la fonction carrée

1°) Notations

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction carrée dans un repère.

On s'intéresse à la tangente en un point A quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

2°) Etude pour $a = 1$ (tangente au point d'abscisse 1)

$$\text{A}\left|\begin{array}{l} x_{\text{A}} = 1 \\ y_{\text{A}} = 1 \end{array}\right. \quad \text{(point fixe)}$$

On note M un point mobile de $\mathcal{C}$ distinct de A.

On note $1 + h$ l'abscisse de M où h est un réel non nul.

$$\text{M}\left|\begin{array}{l} x_{\text{M}} = 1+h \\ y_{\text{M}} = (1+h)^2 = 1+2h+h^2 \end{array}\right. \quad \text{avec } h \neq 0.$$

On va calculer le coefficient directeur de la droite (AM).

$$\frac{y_{\text{M}} - y_{\text{A}}}{x_{\text{M}} - x_{\text{A}}} = \frac{1+2h+h^2-1}{1+h-1} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h \quad (h \neq 0)$$

Les h « s'évanouissent »

3°) Etude dans le cas général (toujours pour la fonction carré)

$$\text{A}\left|\begin{array}{l} x_{\text{A}} = a \\ y_{\text{A}} = a^2 \end{array}\right.$$

On note M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A.

On note $a + h$ l'abscisse de M où h est un réel non nul.

$$\text{M}\left|\begin{array}{l} x_{\text{M}} = a+h \\ y_{\text{M}} = (a+h)^2 = a^2+2ah+h^2 \end{array}\right.$$

On va calculer le coefficient directeur de la droite (AM) :

$$\frac{y_{\text{M}} - y_{\text{A}}}{x_{\text{M}} - x_{\text{A}}} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{a+h-a} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h \quad (h \neq 0)$$

Les h « s'évanouissent »

IX. Un quotient important : le rapport de Newton

1°) Notations

f désigne une fonction définie sur un intervalle I.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

A est un point fixé de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A d'abscisse $a + h$ $(h \neq 0)$.

$$\text{A}\left|\begin{array}{l} x_{\text{A}} = a \\ y_{\text{A}} = f(a) \end{array}\right. \qquad \text{M}\left|\begin{array}{l} x_{\text{M}} = a+h \\ y_{\text{M}} = f(a+h) \end{array}\right.$$

Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{y_{\text{M}} - y_{\text{A}}}{x_{\text{M}} - x_{\text{A}}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2°) Définition (un quotient important)

Le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé le **taux de variation de *f*** entre *a* et *a* + *h*.
Ce quotient est si important (nous verrons pourquoi dans le chapitre suivant) qu'on lui donne le nom de **« rapport de Newton »** de *f* en *a*.

Il s'agit d'un quotient avec beaucoup de lettres.
Dans ce quotient, au numérateur, $f(a+h)$ désigne l'image de *a* + *h* par *f*.

Ce quotient représente le coefficient directeur de la droite (AM) où A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse *a* et M est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse *a* + *h*.

3°) Organisation des calculs

On calcule séparément $f(a)$ et $f(a+h)$.
(Voir exercices).

4°) Remarque générale

Dans ce quotient *a* est fixe et *h* est appelé à varier.
Lorsque la valeur de *a* est connue, ce quotient ne dépend que de *h*.

5°) « L'évanouissement des *h* »

Dans le VIII avec la fonction carré, on a constaté que les *h* se simplifiaient dans le quotient.
Cette observation se généralise.
En pratique pour des fonctions polynômes ou rationnelles, le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être simplifié de sorte que les *h* disparaissent **au dénominateur**.
On dit alors que l'on a obtenu la **forme simplifiée**.
On disait au XVIIe siècle que les *h* « s'évanouissent » (cela a beaucoup frappé les gens à l'époque).

Ou

Pour beaucoup de fonctions (polynômes ou rationnelles en particulier), le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être simplifié (par les moyens algébriques ordinaires : développement, factorisation…) de sorte qu'il n'y ait plus de *h* au dénominateur (le calcul peut être plus ou moins long et plus ou moins difficile).

On dit que les « *h* » disparaissent mais il en reste quand même !

(Voir exercices)

*LGD : logiciel de géométrie dynamique.