TS3

Contrôle du mercredi 10 novembre 2010 (4 h)

Prénom et nom : …….

Rédiger très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume. Ne pas utiliser d'abréviations.
Encadrer en rouge à la règle tous les résultats demandés.
L'énoncé donne quelques modèles de rédaction qui doivent être respectés.

I. (3 points) Compléter directement en bleu sur cette feuille. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Soit f une fonction telle que pour tout réel x de l'intervalle]0 ; 1], on ait $x^2 \leq f(x) - 1 \leq x$.

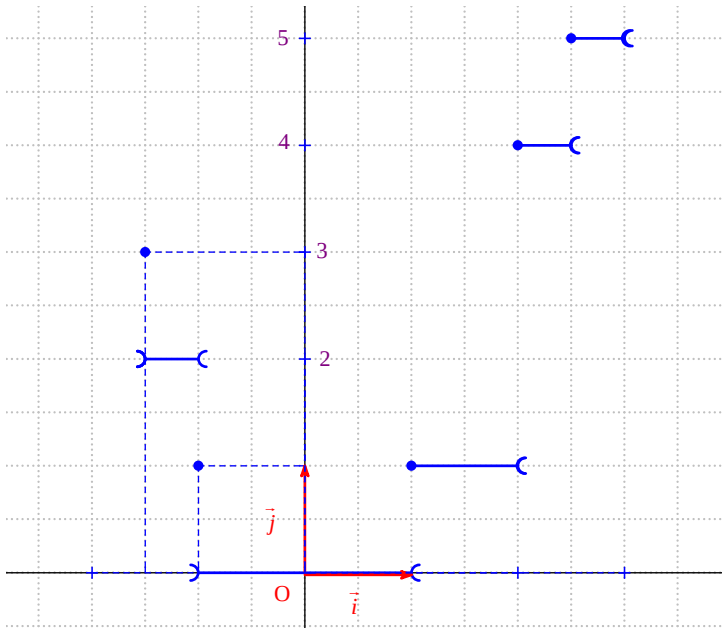
Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

2°) Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

a) Si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et si $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{x \to 3} (g \circ f)(x) = 7$.

b) Si $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$ et si $\lim\limits_{x \to \ldots\ldots} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{x \to \ldots\ldots} (g \circ f)(x) = 1$.

II. (6 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}(x\mathrm{E}(x))$. On donne ci-dessous sa représentation graphique sur l'intervalle [– 1,5 ; 3] dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Déterminer par le calcul en détaillant bien toutes les étapes l'image de – 1,3 par f. Vérifier graphiquement.
2°) Soit n un entier relatif quelconque. Exprimer $f(n)$ en fonction de n. Donner le détail des calculs.
3°) On observe graphiquement que pour tout réel $x \in [2 ; 2,5[$ on a $f(x) = 4$.
On peut justifier ce résultat par le calcul de la manière suivante :

> Soit x un réel quelconque dans l'intervalle [2 ; 2, 5[.
>
> On a donc $2 \leqslant x < 2,5$ (1).
>
> (1) entraîne : $2 \leqslant x < 3$, donc, par définition de la partie entière, on a : $\mathrm{E}(x) = 2$.
>
> Par suite, on peut écrire que $f(x) = \mathrm{E}(2x)$.
>
> En multipliant les deux membres de l'inégalité (1) par 2, on obtient $4 \leqslant 2x < 5$.
> Donc, par définition de la partie entière, on a : $\mathrm{E}(2x) = 4$.
>
> On en déduit que $f(x) = 4$.
>
> **Conclusion :** Pour tout réel $x \in [2 ; 2,5[$, on a $f(x) = 4$.

Après avoir lu et compris la démonstration dans l'encadré, **adapter** la démarche ci-dessus en rédigeant de la même manière pour démontrer que :

- pour tout réel $x \in [2,5 ; 3[$, on a $f(x) = 5$;
- pour tout réel $x \in]-1,5 ; -1[$, on a $f(x) = 2$ (attention, il s'agit bien de l'intervalle]– 1,5 ; – 1[<u>ouvert</u> aux deux bornes).

Attention, il faut vraiment **réadapter** la démarche de l'encadré.

III. (11 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{8}{x^2+3}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer la dérivée de f (tirer tous les traits de fraction à la règle). Donner directement le résultat.
Ne pas poser $u(x) = \ldots$, $v(x) = \ldots$.
2°) On donne : $(x-1)^2(x^2+2x+9) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$ (on pourra utiliser directement ce résultat sans refaire le calcul).
Préciser pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de f s'annule.
Dresser un tableau comprenant le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (faire ce tableau ainsi que les flèches de variation à la règle, faire les traits de séparation entre les lignes à la règle).
Compléter ce tableau de variation avec les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ <u>sans détailler les calculs</u>.
3°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$ et en $-\infty$ et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
Rédiger soigneusement de manière concise.
4°) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (on donnera éventuellement les valeurs arrondies au centième).

x	–5	– 4	– 3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$									

Tracer $\mathcal{C}$ et Δ ainsi que la tangente horizontale (rappel : commencer par tracer Δ). On prendra un centimètre pour

unité graphique. Tracer également la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5°) a) Démontrer en rédigeant soigneusement que pour tout réel k l'équation $f(x)=k$ (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) On prend $k=\frac{9}{5}$. On note α la solution de l'équation $f(x)=\frac{9}{5}$.

Justifier que $\alpha \in [-2\,;-1]$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01 en utilisant la méthode de balayage (faire figurer un tableau sur la copie).

IV. (12 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-12x-1$.

1°) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ avec les limites et les extremums (sans justifier les calculs de limites).
Faire ce tableau ainsi que les flèches de variation à la règle, faire les traits de séparation à la règle.

2°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ (E) admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
On ne rédigera complètement que pour l'une de ces solutions.

3°) On note x_1, x_2, x_3 ces trois solutions dans l'ordre croissant. Faire figurer x_1, x_2, x_3 dans le tableau de variation de f.
Grâce à la calculatrice, donner sans justifier un encadrement de chacune de ces solutions par deux entiers relatifs consécutifs. Ecrire ces trois encadrements séparés (un encadrement par solution) sur une seule ligne.

4°) Donner sans justifier le tableau de signe de $f(x)$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^4-6x^2-x-1$.

1°) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ avec les limites (sans détailler le calcul des limites). On utilisera la partie A ; on ne cherchera pas à calculer les extremums locaux.

2°) Donner les valeurs de $g(-2)$ et $g(1)$ (sans détailler les calculs) ; en déduire le signe de $g(x_1)$ et de $g(x_3)$.

3°) En remarquant que pour tout réel x, on a : $g(x)=x^2(x^2-6)-(x+1)$ (inutile de faire la vérification de cette égalité sur la copie), démontrer que, pour tout réel x de $]-1\,;0[$, on a : $g(x)<0$.
En déduire le signe de $g(x_2)$.

4°) Déduire des résultats précédents le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x)=0$ (F).
On répondra en recopiant et complétant la phrase : « L'équation (F) admet …….. solutions dans $\mathbb{R}$. ».
Donner le résultat directement sans justifier.

5°) Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées de $g(x_1)$, $g(x_2)$ et $g(x_3)$.
(On utilisera la fonction permettant de déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction sur un intervalle).

6°) **Question difficile**

a) Démontrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a : $g(x_i)=-3(x_i)^2-\frac{3}{4}x_i-1$.

b) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note M_i le point la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x_i.

Déduire de la question précédente que les points M_1, M_2, M_3 appartiennent à la parabole Γ d'équation $y=-3x^2-\frac{3}{4}x-1$.

Partie C

Dans cette partie, toute trace de recherche même partielle ou infructueuse sera prise en compte.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(-2x^3+3x^2+3x-1)e^{2x}$.
Dresser le tableau de variation de h sans les limites. On ne cherchera pas à calculer les extremums locaux.

V. (8 points) Pour tout réel k <u>strictement positif</u>, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f_k(x)=kx+x\ln x$. On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

Compléter directement les phrases ci-dessous sur l'énoncé sans justifier les résultats sur la copie (recherche au brouillon).

1°) Pour tout réel $x>0$, on a : $f_k'(x)=$……. (résultat sous forme simplifiée).

2°) $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale au point A_k d'abscisse ……

3°) $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des abscisses au point B_k d'abscisse …….

4°) Le coefficient directeur de la tangente au point B_k est égal à …….

Partie B (à rédiger sur copie)

Démontrer que A_k appartient à une droite fixe Δ dont on donnera une équation.

Bonus au choix

① On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$.

Démontrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]0\,;1[$.

Déterminer l'expression de f^{-1}.

② Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Quelques « modèles » de rédaction pour les fonctions :

1. « La fonction *f* est dérivable sur …. comme …. . »

2. « La fonction *f* est continue sur …. comme …. . »

3. « Pour tout $x \in \ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$ » (on peut utiliser le quantificateur $\forall$).

4. « La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation y = …. pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ ».

Dans tous les exercices du contrôle, on donnera directement les résultats des calculs de dérivées.

Corrigé du contrôle du 10 novembre 2010

I.

1°) Soit f une fonction telle que pour tout réel x de l'intervalle]0 ; 1], on ait $x^2 \leq f(x) - 1 \leq x$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Démonstration : théorème des gendarmes

$\forall x \in]0, 1]$ $x^2 \leq f(x) - 1 \leq x$

donc $\forall x \in]0, 1]$ $x^2 + 1 \leq f(x) \leq x + 1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

2°) Dans les deux cas, on applique la règle de limite d'une composée.

a) Si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ et si $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 7$, alors $\lim\limits_{x \to 3} (g \circ f)(x) = 7$.

b) Si $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$ et si $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$, alors $\lim\limits_{x \to 4} (g \circ f)(x) = 1$.

II.

1°) Déterminons par le calcul l'image de $-1,3$ par f.

$f(-1,3) = \mathrm{E}\left[-1,3 \times \mathrm{E}(-1,3)\right]$

Or $-2 \leq -1,3 < -1$ donc $\mathrm{E}(-1,3) = -2$

$f(-1,3) = \mathrm{E}\left[-1,3 \times (-2)\right]$
$f(-1,3) = \mathrm{E}(2,6)$

Or $2 \leq 2,6 < 3$ donc $\mathrm{E}(2,6) = 2$

Donc $f(-1,3) = 2$.
On vérifie que ce résultat coïncide avec celui obtenu sur le graphique.

Attention à la présentation du calcul :

$f(-1,3) = \ldots$ (pas de $\forall x \in \ldots$)
$= \ldots$

2°) $n \in \mathbb{Z}$

Exprimons $f(n)$ en fonction de n.

$f(n) = \mathrm{E}\left[n \times \mathrm{E}(n)\right]$

Or $n \in \mathbb{Z}$ donc $\mathrm{E}(n) = n$.

D'où $f(n) = \mathrm{E}(n \times n) = \mathrm{E}(n^2)$.

Or n^2 est un entier naturel donc $\mathrm{E}(n^2) = n^2$.

D'où $f(n) = n^2$.

3°)

• Démontrons que pour tout réel $x \in [2,5 ; 3[$, on a $f(x) = 5$.

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle [2,5 ; 3[.

On a donc $2,5 \leqslant x < 3$ (1).

(1) entraîne : $2 \leqslant x < 3$, donc, par définition de la partie entière, on a : $\mathrm{E}(x) = 2$.

Par suite, on peut écrire que $f(x) = \mathrm{E}(2x)$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité (1) par 2, on obtient $5 \leqslant 2x < 6$.

Donc, par définition de la partie entière, on a : $\mathrm{E}(2x) = 5$.

On en déduit que $f(x) = 5$.

Conclusion : Pour tout réel $x \in [2,5 ; 3[$, on a $f(x) = 5$.

• Démontrons que pour tout réel $x \in]-1,5 ; -1[$, on a $f(x) = 2$.

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $]-1,5 ; -1[$.

On a donc $-1,5 < x < -1$ (1).
(1) entraîne : $-2 < x < -1$, donc, par définition de la partie entière, on a : $\mathrm{E}(x) = -2$.
Par suite, on peut écrire que $f(x) = \mathrm{E}(-2x)$.
En multipliant les deux membres de l'inégalité (1) par 2, on obtient $3 > -2x > 2$.
Donc, par définition de la partie entière, on a : $\mathrm{E}(-2x) = 2$.

On en déduit que $f(x) = 2$.

Conclusion : Pour tout réel $x \in [2,5 ; 3[$, on a $f(x) = 2$.

II.

1°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - 8 \times \dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$

$$= 1 - \frac{16x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+3\right)^2 - 16x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$= \frac{x^4+6x^2-16x+9}{\left(x^2+3\right)^2}$$

Ne pas poser $u(x) = \ldots$, $v(x) = \ldots$
Si l'on pose $u(x) = \ldots$, $v(x) = \ldots$, attention à la syntaxe : $f = u + v$ donc $f' = u' + v'$.

2°) D'après l'énoncé, $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)^2\left(x^2+2x+9\right) = x^4+6x^2-16x+9$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{(x-1)^2\left(x^2+2x+9\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$

Cherchons la (ou les) valeur(s) pour lesquelles la dérivée s'annule.
On résout donc l'équation : $f'(x) = 0$.

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2\left(x^2+2x+9\right)}{\left(x^2+3\right)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+2x+9\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ ou $x^2+2x+9 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x^2+2x+9 = 0$

Considérons le polynôme x^2+2x+9.
Son discriminant est égal à $\delta = -32$.

$\delta < 0$ donc le polynôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

(N.B. : il faut éviter de noter Δ le discriminant du polynôme car l'asymptote à la courbe s'appelle Δ dans la suite de l'énoncé. D'où l'intérêt de lire l'énoncé complètement.)

Finalement, $f'(x)$ s'annule pour $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe $(x-1)^2$		+	0	+	
Signe x^2+2x+9*		+		+	
Signe $\left(x^2+3\right)$		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

* Le discriminant ce polynôme est strictement négatif donc ce polynôme est toujours du signe de 1 (coefficient du terme en x^2) c'est-à-dire strictement positif.

3°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x+1) = x+1+\dfrac{8}{x^2+3} - x - 1 = \dfrac{8}{x^2+3}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2+3} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x^2+3} = 0$$

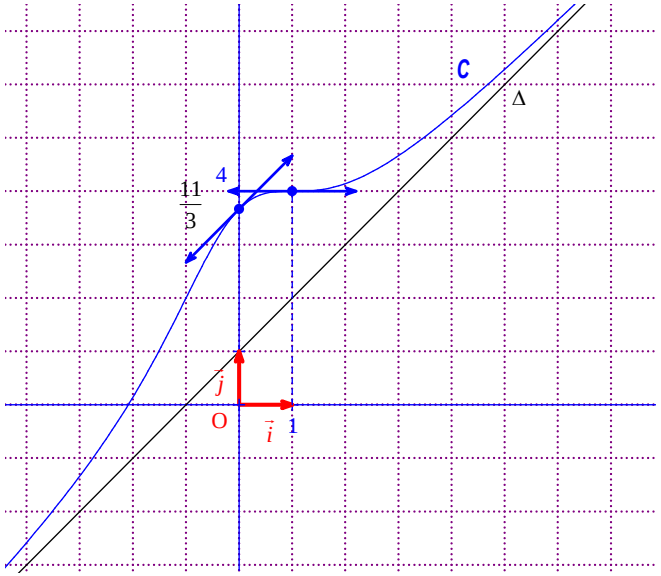
La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x + 1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x+1) > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est toujours située strictement au-dessus de la droite Δ.

4°) Tracé de $\mathcal{C}$

On commence par tracer l'asymptote.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.



$f'(0)=1$

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1.
Elle est donc parallèle à l'asymptote Δ.

x	–5	– 4	– 3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–3,71	– 2,58	– 1,33	0,14	2	3,67	4	4,14	4,67

Remarque : Plus x augmente (lorsque x est positif), plus la distance entre le point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et le point N de x d'abscisse x diminue. Cela doit se voir sur le graphique.

⚠ Le nom de la courbe doit figurer sur le graphique.

Ne pas faire de croix pour les points. Marquer les points avec des points.

5°)
a) Démontrons que pour tout réel k l'équation $f(x)=k$ (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Donc pour tout réel k l'équation $f(x)=k$ (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) Justifions que $\alpha \in [-2\,;-1]$.

On a : $f(-2)=-2+1+\frac{8}{7}=-1+\frac{8}{7}=\frac{1}{7}=0{,}14...$ et $f(-1)=2$

Or $\frac{9}{5}\in[0{,}14\,;2]$. Donc $\alpha \in [-2\,;-1]$.

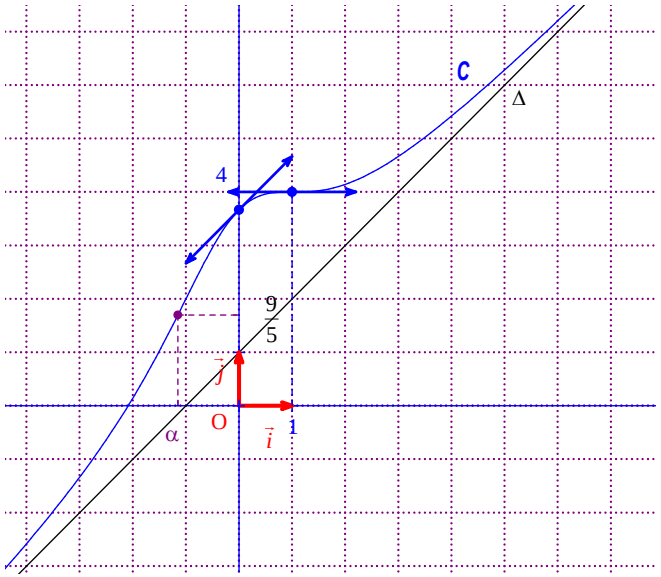
x	–2	– 1,9	–1,8	–1,7	–1,6	–1,5	–1,4	– 1,3	–1,2	–1,1	–1
$f(x)$	0,14	0,31	0,48	0,66	0,84	1,023	1,212	1,405	1,6018	1,8002	2

$-1{,}2 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}1$ (encadrement d'amplitude 10^{-1})

Attention aux arrondis dans les valeurs de $f(x)$ qui ont été calculées dans le tableau.
De mauvais arrondis peuvent donner de mauvais encadrements ; de manière générale, il vaut mieux utiliser des troncatures quand on utilise la méthode de balayage.
Beaucoup d'élèves ont dit que $-1{,}1 \leqslant \alpha \leqslant -1$ à cause d'un manque de réflexion dans les arrondis.
On ne cherche pas de changement de signe !

x	–2	– 1,19	–1,18	–1,17	–1,16	–1,15	–1,14	– 1,13	–1,12	–1,11	–1,10
$f(x)$	1,621	1,62	1,64	1,66	1,68	1,7	1,72	1,7405	1,7604	1,7803	1,8002

On a : $-1{,}11 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}10$ (encadrement d'amplitude 10^{-2})



IV.

Partie A

$f(x) = 4x^3 - 12x - 1$

1°) f est une fonction polynôme donc elle dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗	0	7 ↘	0	-9 ↗	0	$+\infty$

2°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

On pose : $I_1 =]-\infty ; -1]$; $I_2 = [-1 ; 1]$; $I_3 = [1 ; +\infty[$ (on prend les trois intervalles fermés).

On applique le corollaire du TVI sur chacun de ces trois intervalles.

f est continue sur I_1.
f est strictement croissante sur I_1.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 7$
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_1) =]-\infty ; 7]$
$0 \in]-\infty ; 7]$
Donc l'équation (E) admet une unique racine dans I_1.

f est continue sur I_2.
f est strictement décroissante sur I_2.
$f(-1) = 7$ et $f(1) = -9$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_2) = [-9 ; 7]$
$0 \in [-9 ; 7]$
Donc l'équation (E) admet une unique racine dans I_2.

f est continue sur I_3.
f est strictement croissante sur I_3.
$f(1) = -9$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(I_3) = [-9 ; +\infty[$
$0 \in [-9 ; +\infty[$
Donc l'équation (E) admet une unique racine dans I_3.
Conclusion : L'équation (E) admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

3°) Grâce à la calculatrice, on obtient : $-2 < x_1 < -1$; $-1 < x_2 < 0$; $1 < x_3 < 2$.

Il faut bien respecter la consigne qui demande d'écrire les trois encadrements sur une même ligne (3 encadrements séparés).

4°)

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

$g(x) = x^4 - 6x^2 - x - 1$

1°) g est une fonction polynôme donc elle dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 4x^3 - 12x - 1$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f(x)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$ ↘		$g(x_1)$ ↗		$g(x_2)$ ↘		$g(x_3)$ ↗		$+\infty$

2°)

$g(-2) = (-2)^4 - 6 \times (-2)^2 + 2 - 1 = 16 - 24 + 2 - 1 = -7$
$g(1) = 1 - 6 - 1 - 1 = -7$

On a : $-2 < x_1 < -1$. D'après le tableau de variation, le minimum de g sur l'intervalle [– 2 ; – 1] est atteint en x_1.
Donc $g(x_1) < g(-2)$ d'où $g(x_1) < 0$.

On a : $1 < x_3 < 2$. D'après le tableau de variation, le minimum de g sur l'intervalle [1 ; 2] est atteint en x_3.
Donc $g(x_3) < g(1)$ d'où $g(x_3) < 0$.

3°) $\forall x \in \mathbb{R} \; g(x) = x^2(x^2 - 6) - (x + 1)$.
$\forall x \in]-1 ; 0[\;\; x^2 < 1$ donc $\forall x \in]-1 ; 0[\;\; x^2 - 6 < 0$.
D'où $\forall x \in]-1 ; 0[\;\; x^2(x^2 - 6) < 0$.

De plus, $\forall x \in]-1 ; 0[\;\; x + 1 > 0$ d'où $-(x + 1) < 0$.
Donc $\forall x \in]-1 ; 0[\;\; g(x) < 0$.

On a : $-1 < x_2 < 0$ donc $g(x_2) < 0$.

N.B. : J'aurais dû donner uniquement cette question. En effet, le signe de $g(x_1)$ et de $g(x_3)$ en résulte. La question aurait alors été : « Déterminer le signe de $g(x_2)$; en déduire celui de $g(x_1)$ et $g(x_3)$ ».

4°) L'équation $g(x) = 0$ (F) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

5°) On utilise la fonction permettant de déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction sur un intervalle.
D'après la calculatrice, on a :

$g(x_1) = -8,2893094546...$
$g(x_2) = -0,9582848831...$
$g(x_3) = -11,752405662...$

6°)

a) Démontrons que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a : $g(x_i) = -3(x_i)^2 - \frac{3}{4}x_i - 1$.

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$.

x_i est solution de (E) donc $f(x_i) = 0$ soit $4x_i^3 - 12x_i - 1 = 0$ d'où $x_i^3 = \frac{12x_i + 1}{4}$.

On en déduit que $x_i^4 = \frac{12(x_i)^2 + x_i}{4}$

On a $g(x_i) = (x_i)^4 - 6(x_i)^2 - x_i - 1$

$$g(x_i) = \frac{12(x_i)^2 + x_i}{4} - 6(x_i)^2 - x_i - 1.$$

$$g(x_i) = 3(x_i)^2 + \frac{x_i}{4} - 6(x_i)^2 - x_i - 1$$

$$g(x_i) = -3(x_i)^2 - \frac{3}{4}x_i - 1$$

b) La réponse est évidente d'après la question a).

Partie C

$$h(x) = \left(-2x^3 + 3x^2 + 3x - 1\right)e^{2x}$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) &= \left(-6x^2 + 6x + 3\right)e^{2x} + \left(-2x^3 + 3x^2 + 3x - 1\right)\left(2e^{2x}\right)\\ &= \left[\left(-6x^2 + 6x + 3\right) + 2\left(-2x^3 + 3x^2 + 3x - 1\right)\right]e^{2x}\\ &= \left(-6x^2 + 6x + 3 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 2\right)e^{2x}\\ &= \left(-4x^3 + 12x + 1\right)e^{2x}\end{aligned}$$

On remarque que $h'(x) = -f(x)e^{2x}$.

On connaît le signe de $f(x)$ grâce à la partie A.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} > 0$.

Donc le signe $h'(x)$ est contraire de celui de $f(x)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		+	0	–	0	+	0	–	
Variations de h	$-\infty$	↗	$g(x_1)$	↘	$g(x_2)$	↗	$g(x_3)$	↘	$-\infty$

V.

Partie A

1°) Pour tout réel $x > 0$, on a : $f_k'(x) = k + \ln x + 1$.

2°) $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale au point A_k d'abscisse e^{-k-1}.
3°) $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des abscisses au point B_k d'abscisse e^{-k}.
4°) Le coefficient directeur de la tangente au point B_k est égal à 1.

Explication détaillée :

$f_k(x) = kx + x\ln x$

1°) $\forall x > 0 \quad f_k'(x) = k \times 1 + \underbrace{1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}}_{\text{dérivée d'un produit}} = k + \ln x + 1$

2°) Pour chercher l'abscisse du point en lequel $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale, on résout l'équation $f_k'(x) = 0$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow k + \ln x + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \ln x = -k - 1\\ &\Leftrightarrow x = e^{-k-1}\end{aligned}$$

3°) Pour chercher l'abscisse du point en lequel $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des abscisses, on résout l'équation $f_k(x) = 0$ (2).

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow kx + x\ln x = 0\\ &\Leftrightarrow x(k + \ln x) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ (impossible car } x > 0) \text{ ou } k + \ln x = 0\\ &\Leftrightarrow k + \ln x = 0\\ &\Leftrightarrow \ln x = -k\\ &\Leftrightarrow x = e^{-k}\end{aligned}$$

4°) Le coefficient directeur de la tangente au point B_k est égal à $f'(e^{-k}) = k + \ln e^{-k} + 1 = k - k + 1 = 1$.
On observe que ce coefficient directeur est constant, indépendant de k.

Partie B

Démontrons que A_k appartient à une droite fixe Δ.
On calcule l'ordonnée de A_k.

$$f\left(e^{-k-1}\right)=ke^{-k-1}+e^{-k-1}\ln\left(e^{-k-1}\right)=ke^{-k-1}+(-k-1)e^{-k-1}=e^{-k-1}(k-k-1)=-e^{-k-1}$$

On a donc $y_{A_k}=-x_{A_k}$.
Par suite, A_k appartient la droite Δ d'équation $y=-x$.

Bonus au choix

① $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

Démontrons que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle]0 ; 1[.

Limites de f

Limite en + ∞

On rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$
Par suite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Limite en – ∞

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

Dérivée de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (celle du dénominateur ne s'annulant pas).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de e^x	+
Signe de $\left(e^x+1\right)^2$	+
Signe de $f'(x)$	+
Variation de f	0 ↗ 1

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle]0 ; 1[.

Déterminons l'expression de f^{-1}.

Soit y un réel quelconque dans l'intervalle]0 ; 1[.

Cherchons $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=y$ (1).

$$\begin{aligned}(1)\ &\Leftrightarrow\ y=\frac{e^x}{e^x+1}\\ &\Leftrightarrow\ \frac{e^x+1}{e^x}=\frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow\ 1+\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}-1\\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{e^x}=\frac{1-y}{y}\\ &\Leftrightarrow\ e^x=\frac{y}{1-y}\\ &\Leftrightarrow\ x=\ln\frac{y}{1-y}\ \text{ car } 0<y<1\end{aligned}$$

La bijection réciproque f^{-1} de f est donc définie sur]0 ; 1[par $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

② **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.**

$f(x)$ si et seulement si $\begin{cases} x \neq 0 \\ \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) \neq 0 \end{cases}$

Résolvons l'équation $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} < 1$$
$$\Leftrightarrow x > 1$$

Donc l'ensemble de définition $\boldsymbol{D}$ de f est : $]-\infty\,;0[\ \cup]0\,;1[$.

Barème

I.

1°) 1
2°) a) 1
b) 1

II.

1°) 1
2°) 1
3°) 4 (2 + 2)

III.

1°) 1
2°) 2
3°) 2
4°) 2
5°) a) 2
b) 2

IV.

Partie A
1°) 2
2°) 2
3°) 2
4°) 1

Partie B
1°) 1
2°) 1
3°) 2
4°) 1
5°) hors barème
6°) hors barème

Partie C

1

V.

Partie A
4 (1 point par réponse)

Partie B
4