1ère S

Les fonctions polynômes de degré quelconque et les fonctions rationnelles

I. Généralités

1°) Définition

Une **fonction polynôme** est une fonction *f* vérifiant les deux conditions :
C_1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
C_2 : il existe des réels a_0, a_1, … a_n avec $a_n \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Rappels :
$x^1 = x$
$x^0 = 1$

2°) Vocabulaire

• L'expression $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est appelée **polynôme en *x***.

• *x* est la **variable** du polynôme.

• Les réels a_0, a_1, … a_n sont appelés les **coefficients du polynôme** (a_k : coefficient de x^k).
Nous admettrons que l'écriture développée réduite est unique donc que les coefficients du polynôme sont unique.

• L'exposant le plus élevé *n* est le **degré du polynôme**.

• Les expressions $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, …, $a_1 x$, a_0 sont appelées **monômes** du polynôme (ce sont des monômes en *x*).

3°) Exemples

• $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 1$
Coefficients : $a_4 = 5$; $a_3 = -2$; $a_2 = 1$; $a_1 = 3$; $a_0 = -1$
$\deg\left[f(x)\right] = 4$

• $f(x) = 2x^3 + x - 5$
Coefficients : $a_3 = 2$; $a_2 = 0$; $a_1 = 1$; $a_0 = -5$
$\deg\left[f(x)\right] = 3$

• $f(x) = (3x-5)^5$
On peut obtenir les coefficients en développant $f(x)$. Sans développer, on peut dire que $\deg\left[f(x)\right] = 5$.

• $f(x) = 3$
Coefficient : $a_0 = 3$
$\deg\left[f(x)\right] = 0$ (polynôme constant)

4°) Contre-exemples

• $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

• $f(x) = 3x^2 - 5|x| + 1$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

5°) Cas particuliers

• $f : x \mapsto 0$ fonction polynôme nulle (n'a pas de degré)
• $f : x \mapsto k$ $(k \neq 0)$ fonction polynôme constante non nulle de degré 0
• $f : x \mapsto ax + b$ $(a \neq 0)$ fonction polynôme de degré 1

6°) Opérations algébriques

• La somme et le produit de deux fonctions polynômes sont des fonctions polynômes.
(Le degré du produit de deux polynômes non nuls est égal à la somme des degrés des deux polynômes).
• Faux pour les quotients.

II. Egalité de deux fonctions polynômes

1°) Égalité de deux fonctions en général

f et *g* sont deux fonctions.

$$f = g \quad \text{signifie} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = g(x) \end{cases}$$

2°) Théorème (admis sans démonstration)

Deux **fonctions polynômes** **non nulles** sont égales si et seulement si :
C_1 : elles ont le même degré
C_2 : les coefficients des termes (monômes) de même degré sont égaux

(**Rappel :** La forme développée réduite est unique.)

N.B. : Les termes de même degré c'est-à-dire les monômes de même degré sont appelés « monômes semblables ».

III. Racines d'un polynôme

1°) Définition [racine ou zéro d'un polynôme]

f est une fonction polynôme.
Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont appelées les **racines** du polynôme $f(x)$.

On parle aussi de **zéro** du polynôme $f(x)$.

2°) Propriété (admise sans démonstration)

Si α est une racine d'un polynôme $f(x)$, alors $f(x)$ se factorise par $(x-\alpha)$ c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $g(x)$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-\alpha)g(x)$.

La propriété se démontre de manière immédiate à l'aide du lemme suivant.

Lemme :

Soit $f(x)$ un polynôme et α est un réel quelconque.
Alors le polynôme $f(x)-f(\alpha)$ est factorisable par $(x-\alpha)$ c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $h(x)$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)h(x)$.

La démonstration de ce lemme repose sur la formule fondamentale de l'algèbre qui montre que pour tout entier naturel p, $x^p-\alpha^p$ est factorisable par $(x-\alpha)$

3°) Exemple

$f(x)=x^3+2x^2+x-4$ $\qquad\qquad$ $\deg\left[f(x)\right]=3$

⚠ Cette année, on ne sait pas résoudre directement l'équation $f(x)=0$.

$\alpha=1$ est une racine évidente (ou un zéro évident) du polynôme car $f(1)=1+2+1-4=0$.
(Comme pour les polynômes du second degré, on a la notion de racine évidente pour des polynômes de degré quelconque.)

Il existe donc un polynôme $P(x)$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)P(x)$.

On a $\deg\left[P(x)\right]=2$.

Donc $P(x)=ax^2+bx+c$.

3 coefficients inconnus $(a\neq 0)$

Méthode des coefficients indéterminés

Rédaction	Commentaires
On pose $g(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.	
$g(x)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$	On développe $g(x)$.
$g(x)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$	On regroupe les monômes semblables.
Or $\quad f(x)=1x^3+2x^2+1x-4$	Phrase quantifiée implicitement.
On identifie les coefficients des termes de même degré.	Deux fonctions polynômes non nulles sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux. On met en relation les deux expressions. C'est le même x dans les deux.

$f=g$ si et seulement si $\begin{cases} a=1 & ① \\ b-a=2 & ② \\ c-b=1 & ③ \\ -c=-4 & ④ \end{cases}$ 4 équations, 3 inconnues (dont 2 équations « prérésolues »)

On ne met pas de x (on identifie juste les coefficients).
Système linéaire
– de 4 équations
– à 3 inconnues
Nouveauté en 1ère S

si et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$ ③ est vérifiée (le système est compatible)

(On prend le « sous-système » formé par les équations ①,②,④. C'est un système de trois équations à trois inconnues dont deux « prérésolues ». On regarde ensuite si l'égalité ③ est vérifiée.)

Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)(x^2+3x+4)}$

N.B. : Il est très conseillé de faire une vérification.

La technique de factorisation que l'on voit ici est complètement nouvelle par rapport aux techniques de factorisation étudiées dans les classes antérieures.

IV. Quelques transformations d'écriture pour les fonctions rationnelles

1°) Exemple 1

$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $\qquad$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\qquad$ (f est une fonction homographique)

Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathcal{D}_f\quad f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

Il s'agit de déterminer la forme canonique de f (la variable se situe à un seul endroit).

1ère méthode (directe) : On force le numérateur

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

$$=\frac{2(x+1)-3}{x+1}$$

$$=\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{3}{x+1}$$

$$=2-\frac{3}{x+1}$$

2e méthode : identification des coefficients

Rédaction : On pose $g(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad g(x)=\frac{a(x+1)+b}{x+1}$$

$$=\frac{ax+a+b}{x+1}$$

Or $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

On identifie les numérateurs.

On obtient le système :

$\begin{cases} a=2 \\ a+b=-1 \end{cases}$ (1ère équation déjà résolue)

$\boxed{\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}}$

On fait la vérification.

2°) Exemple 2

$f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+3}$ $\quad \mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ (f est une fonction rationnelle)

Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$.

On utilise la 2e méthode : identification des coefficients

Rédaction : On pose $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad g(x)=\dfrac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3}$ (on « développe » $g(x)$)

$$=\frac{ax^2+3ax+bx+3b+c}{x+3}$$

$$=\frac{ax^2+(3a+b)x+3b+c}{x+3}$$

Or $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+3}$.

On identifie les numérateurs.

On obtient le système $\begin{cases} a=1 \\ 3a+b=2 \\ 3b+c=-1 \end{cases}$.

On trouve $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x)=x-1+\frac{2}{x+3}}$$

V. Compléments : deux autres méthodes pour l'exemple du III. 3°)

Factorisation de $f(x)=x^3+2x^2+x-4$ par $(x-1)$.

1°) Division euclidienne de polynômes

(présentation habituelle comme pour les entiers)

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2+3x+4 \\ \hline 3x^2+x-4 & \\ -(3x^2-3x) & \\ \hline 4x-4 & \\ -(4x-4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le reste est nul.
(Si on ne trouve pas 0, c'est qu'il y a un reste et donc que le polynôme n'est pas factorisable).

dividende = quotient × diviseur + reste

$x^3+2x^2+x-4=(x-1)\left(x^2+3x+4\right)$

2°) Schéma de Hörner

$f(x)=1x^3+2x^2+1x-4$

On sait que 1 est une racine évidente du polynôme donc le polynôme est factorisable par $x-1$.

1	2	1	– 4	□ coefficients du polynôme
×1 1	1 + = 3	×1 3 + = 4	×1 4 + = $\boxed{0}$ $f(1)$	

On démarre par 1 qui est la racine évidente du polynôme.

On multiplie à chaque fois par 1 qui est la racine évidente.
On récupère sur la 2^e^ ligne les coefficients du quotient dans la factorisation de $f(x)$ par $x-1$.

On en déduit que $f(1)=0$ et que $f(x)=(x-1)\left(x^2+3x+4\right)$.

N.B. : Toutes les méthodes proposées dans ce chapitre marchent évidemment pour les fonctions polynômes de degré strictement supérieur à 3 (pour nous, souvent des polynômes de degré 4).

Cas général où α est racine du polynôme.

…	…	…	…	□ coefficients du polynôme
× α α	… + = …	× α …. + = …	× α … + = $\boxed{0}$ $f(\alpha)$	

Le 21-9-2021

En T1 spécialité, cours de 11$^{\text{h}}$30 à 13$^{\text{h}}$.

À quoi ressemblent les courbes représentatives des fonctions polynômes ?

Exemple de Tom Gohier : $f : x \mapsto x^4+3x^3-x^2+6x-8$

Travail de réflexion intéressant par rapport à l'observation.
Réglage des axes nécessaire pour se faire une idée plus précise.

Formules pour les racines des équations polynomiales

• Équation du premier degré : aucun problème

• Équation du second degré : expression des racines éventuelles à l'aide de radicaux et du discriminant (racine carrée du discriminant)

• Équation du troisième degré : formule de Cardan
Jérôme Cardan (Italien du XVIe siècle)

• Équation du quatrième degré : formules de Ferrari (Italien du XVIe siècle)
On a des expressions à l'aide de radicaux

• Équation de degré supérieur ou égal à 5 : On peut démontrer qu'il n'existe pas de formule donnant les expressions des racines à l'aide de radicaux.
Il faut connaître la théorie de Galois (du nom du brillant mathématicien français Évariste Galois mort au début du XIXe siècle dans un duel).

Équation du troisième degré : Formule de Cardan

On considère une équation de la forme $x^3+px+q=0$ (1) où p et q sont deux réels.

On peut démontrer que toute équation du troisième degré du type $x^3+ax^2+bx+c=0$ peut se mettre sous cette forme grâce à un changement de variable de la forme $X=x-u$.

On pose $\Delta=4p^3+27q^2$.

Δ est appelé le discriminant de l'équation (1).

Théorème admis :

Si $\Delta>0$, alors l'équation (1) admet une unique racine réelle

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$ (formule de Cardan).

$\sqrt[3]{x}$ désigne la racine cubique du réel x c'est-à-dire le réel dont le cube est égal à x.
On peut l'obtenir grâce à la commande de la calculatrice. Sur calculatrice TI 83, appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$ MATH 4 : $\sqrt[3]{\ }($).

Nous allons appliquer ce résultat à un exemple d'équation.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3+x-3=0$ (1).

L'équation (1) est du type $x^3+px+q=0$ avec $p=1$ et $q=-3$.

$$\begin{aligned}\Delta&=4p^3+27q^2\\&=4\times1^3+27\times(-3)^2\\&=4+243\\&=247\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc l'équation (1) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est donnée par : $\alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}$ soit

$\alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{247}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{247}{108}}}$ ou encore, si l'on veut, $\alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{741}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{741}}{18}}$.

Cette écriture donne la valeur exacte de α sous la forme d'une expression à l'aide de radicaux.
Cette écriture ne peut pas être simplifiée.
À l'aide de la calculatrice, en utilisant la racine cubique, on peut retrouver le début de l'écriture décimale de α que l'on peut obtenir en utilisant la commande de résolution d'équations de la calculatrice.

La résolution exacte des équations (c'est-à-dire la détermination de valeurs exactes des solutions) n'est, en général, pas possible. C'est pourquoi on utilise fréquemment une résolution approchée des équations c'est-à-dire que l'on détermine des encadrements ou – ce qui est lié – des valeurs approchées des solutions. Nous avons déjà vu la méthode de balayage. Nous allons étudier à présent une méthode très importante : la méthode de dichotomie.