TS3

Contrôle du samedi 16 octobre 2010 (3 heures)

Écrire très lisiblement et sans ratures, sans utiliser d'abréviations. Encadrer en rouge tous les résultats demandés à la règle. Au début de la copie, aménager un cartouche de présentation avec les numéros des exercices qui permettra de reporter les points. Ne rien écrire sur cette feuille en dehors de ce qui est demandé. Faire les tableaux de variations et les flèches de variations à la règle (sans omettre les barres de séparation entre les lignes du tableau). Écrire les barres de fractions horizontalement.

Prénom : ………………………………… **Nom :** ……………………………………………………

I. (4 points) À remplir sur le sujet.

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Donner les réponses dans les cadres prévus à cet effet (une seule réponse à chaque fois, la réponse ne doit pas déborder du cadre).

1°) On pose $A = e^{\ln 1 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 + \ln 5}$. Calculer la valeur exacte de A.

A = ……….

2°) On considère les systèmes (I) $\begin{cases} 4\ln x + \ln y = 6 \\ 5\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$ et (II) $\begin{cases} 4e^x + e^y = 6 \\ 5e^x - e^y = 3 \end{cases}$.

Donner leurs ensembles de solutions respectifs S_1 et S_2.

S_1 = …………………….……….	S_2 = …………………….……….

3°) Donner l'ensemble des solutions S de l'inéquation $e^x + 4e^{-x} \leqslant 5$.

S = ……………………..….

4°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) + 4\ln\left(x^2 + 9x + 14\right)$.

$\mathcal{D}$ = ……………………………….

5°) Donner l'ensemble de solutions S de l'équation $e^{x+1} - 2e^x + 1 = 0$.

S = ………………...

6°) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$.

$f'(x)$ = …………………………….……. (résultat sous forme factorisée)

7°) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

$f'(x)$ = ……………… (trait de fraction à la règle)

II. (4 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2°) Calculer $f'(x)$. Tirer les traits de fraction à la règle.
3°) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ avec les limites (tableau et flèches de variations à la règle).
4°) Calculer $f''(x)$.

III. (4 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2°) Calculer $f'(x)$ sans modifier l'expression de f.
3°) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ avec les limites (tableau et flèches de variations à la règle).
Calculer la (les) valeur(s) du (des) extremum(s).
4°) Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = e^{-x}$ (E).

IV. (4 points) Pour tout réel k <u>strictement positif</u>, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln x - kx$. On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer les limites de f_k en $+\infty$ et en 0^+.
2°) Calculer $f_k'(x)$ (résultat sous la forme d'un seul quotient).
3°) Dresser le tableau de variations de f_k sur $]0\,;+\infty[$ avec les limites (tableau et flèches de variation à la règle).
Attention à la double barre sous 0 sur la ligne du signe de $f_k'(x)$ et sur celle des variations de f_k.
Calculer l'extremum de f_k en fonction de k.

4°) Déterminer pour quelle valeur de k la courbe $\mathcal{C}_k$ passe par le point $\text{A}(1\,;-3)$.

On rédigera ainsi :

$\text{A} \in \mathcal{C}_k \Leftrightarrow ....$

$\Leftrightarrow ....$

5°) Déterminer pour quelles valeurs de k la courbe $\mathcal{C}_k$ est entièrement située en dessous de l'axe des abscisses.
On s'efforcera de raisonner par équivalence (en utilisant éventuellement le symbole d'équivalence logique).

V. (4 points) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

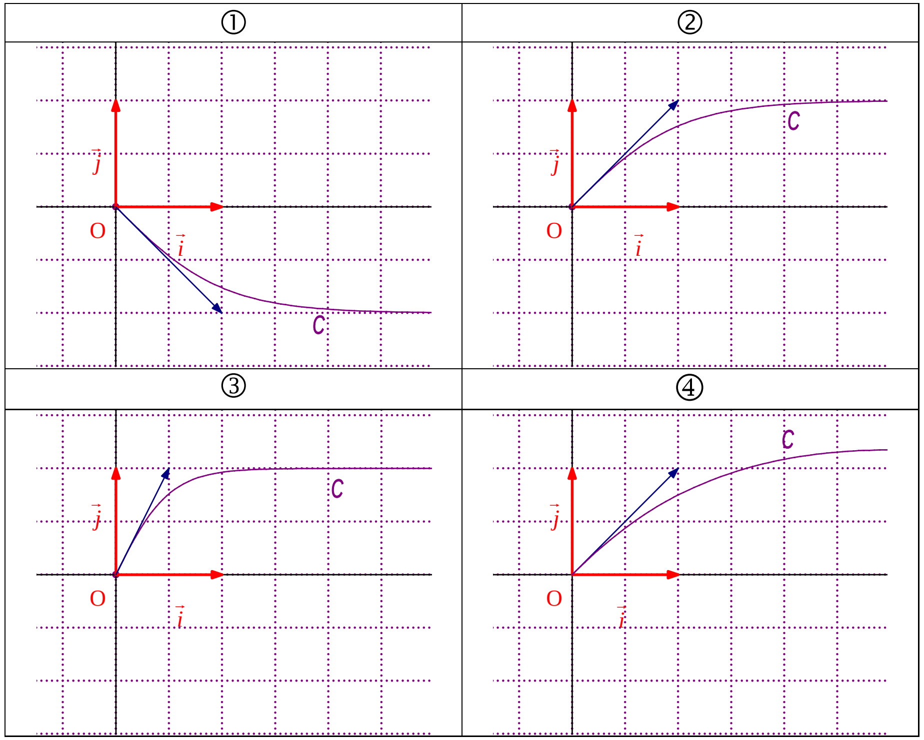
1°) Calculer la limite de f en $+\infty$ en détaillant bien les calculs. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

2°) Calculer $f'(x)$. Tirer les traits de fractions à la règle.

3°) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$ avec les limites (tableau et flèches de variation à la règle). Compléter avec l'image de 0 et la limite de f en $+\infty$.

4°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point O.

5°) Parmi les quatre graphiques ci-dessous, un seul représente la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T. Indiquer lequel sans justifier.



Quelques « modèles » de rédaction pour les fonctions :

1. « L'équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ s'écrit …………………… »
2. « La fonction f est dérivable sur …. comme …. . »
3. « Pour tout $x \in$ … $f'(x)=$........ » (on peut utiliser le quantificateur $\forall$). Ne pas oublier de préciser le domaine de validité lorsque l'on effectue des réécritures.
4. « La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=a$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ ».
5. « La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E). »
6. « On considère les fonctions u et v définies sur … par $u(x)=$........ et $v(x)=$........ . »

Notations :

1. Mise en garde : L'usage du symbole $\Leftrightarrow$ est déconseillé dans ce devoir (sauf **IV.** 4°) et 5°) pour lesquels des modèles de rédaction sont indiqués).
2. Ensemble des solutions d'un système à deux inconnues : Si le système admet un seul couple solution, on écrit que l'ensemble des solutions est $S=\{(....\,;\,....)\}$ (les parenthèses servent à noter le couple, les accolades servent à noter l'ensemble).
3. Pour les limites de sommes et de produits ne pas oublier de mettre des parenthèses autour des expressions considérées.

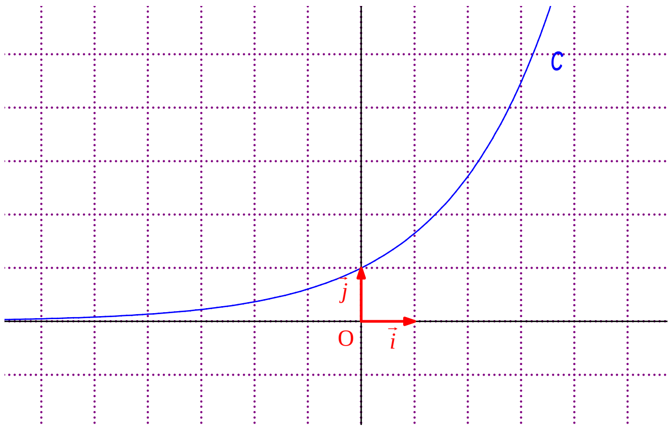
Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$.

4. Ecrire toutes les barres de fractions en horizontale.

Bonus

$\boxed{1}$ La courbe $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f solution de l'équation différentielle $y-2y'=0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'expression de f.



$\boxed{2}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{2-x}$.

Démontrer que pour tout réel $x \in [0\,;1]$ on a : $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Corrigé du contrôle du 16-10-2010

I.

1°) $A=e^{\ln 1-\ln 2+\ln 3-\ln 4+\ln 5}=e^{\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}+\ln 5}=e^{\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times 5\right)}=e^{\ln\frac{15}{8}}=\frac{15}{8}$

2°)

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (I) $\begin{cases}4\ln x+\ln y=6\\5\ln x-\ln y=3\end{cases}$.

Nécessairement, on a : $x>0$ et $y>0$.

On pose $X=\ln x$ et $Y=\ln y$.

Le système (I) s'écrit (I') $\begin{cases}4X+Y=6\\5X-Y=3\end{cases}$

On résout (I') par une méthode au choix (substitution ou combinaisons linéaires).
On trouve $X=1$ et $Y=2$.

Or $X=\ln x$ et $Y=\ln y$.

Donc (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}\ln x=1\\\ln y=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=e\\y=e^2\end{cases}$

$S_1=\left\{\left(e\,;e^2\right)\right\}$

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (II) $\begin{cases}4e^x+e^y=6\\5e^x-e^y=3\end{cases}$.

On pose $X=e^x$ et $Y=e^y$.

Le système (II) s'écrit (II') $\begin{cases}4X+Y=6\\5X-Y=3\end{cases}$.

On retombe sur le système (I') que l'on a déjà résolu.
On trouve $X=1$ et $Y=2$.

Or $X=e^x$ et $Y=e^y$.

Donc $(\mathrm{II}')\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=1\\e^y=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\ln 2\end{cases}$

$S_2=\left\{\left(0\,;\ln 2\right)\right\}$

3°) $S=\left[0\,;\ln 4\right]$

4°) $f:x\mapsto \ln\left(x^2-5x+6\right)+4\ln\left(x^2+9x+14\right)$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}x^2-5x+6>0\\x^2+9x+14>0\end{cases}$

Le polynôme x^2-5x+6 a pour racines 2 et 3 ($\Delta_1=25-24=1$).
Le polynôme $x^2+9x+14$ a pour racines -7 et -2 ($\Delta_2=81-56=25$).

On applique la règle du signe du trinôme.

$x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,;2\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[$
$x^2+9x+14>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,;-7\right[\cup\left]-2\,;+\infty\right[$

$D=\left]-\infty\,;-7\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[$ (on effectue l'intersection des deux réunions d'intervalles trouvées précédemment).

5°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x+1}-2e^x+1=0$ (1).

$(1)\Leftrightarrow e^x\times e-2e^x+1=0$

$\Leftrightarrow e^x(e-2)=-1$

$\Leftrightarrow e^x=-\frac{1}{e-2}$

$\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2-e}$

Or $e>2$ donc $2-e<0$ d'où $\frac{1}{2-e}<0$.

L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans $\mathbb{R}$.

6°) $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2$

$f'(x)=\frac{1}{2}\times\left(2x\times\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{4}\times 2x=x\times\ln x+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x=x\times\ln x-x=x(\ln x-x)$

7°) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x}\times\frac{1}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

II. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

1°) **Limites de *f***

Limite en + ∞

On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

Par suite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Limite en – ∞

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

2°) **Dérivée de *f***

f est dérivable sur ℝ comme quotient de deux fonctions dérivables sur ℝ (celle du dénominateur ne s'annulant pas).

Attention à ne pas utiliser le mot « composé » à tort et à travers.
On ne peut pas dire : « L'expression de *f* est *composée* de fonctions dérivables sur ℝ donc *f* est dérivable ℝ ».
Le mot « composé » a un sens très précis en mathématiques. On parle de la composée de deux fonctions.
Le mot « composé » ne peut donc pas être employé en mathématiques dans son sens courant de « constitué ».
Pour pallier cet inconvénient, on doit invoquer les opérations algébriques qui entrent en jeu (somme, produit, quotient).
On dira *f* est la somme/ le produit/ le quotient de fonctions dérivables sur ℝ (lorsque l'on a un quotient, on doit préciser que le dénominateur ne s'annule pas) donc *f* est dérivables sur ℝ.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

3°) **Tableau de variations de *f***

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de e^x	+
Signe de $\left(e^x+1\right)^2$	+
Signe de $f'(x)$	+
Variation de *f*	0 ↗ 1

f est strictement croissante sur ℝ.

4°) Calculons $f''(x)$.

On écrit $f'(x)$ comme un produit (car ce sera plus simple pour dériver sous cette forme).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=e^x\times\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=e^x\times\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}+e^x\times\left[-\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^3}\right]=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-2e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^{2x}+e^x-2e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}$$

formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

On peut aussi écrire $f''(x)=\dfrac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$.

III. $f(x)=xe^{-x}$

1°) **Limites de *f***

Limite en + ∞

On rencontre une forme indéterminée du type « 0 × ∞ ».

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=x\times\frac{1}{e^x}=\frac{x}{e^x}=\frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}=+\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2°) **Dérivée de *f***

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On applique la formule de dérivation d'un produit (il est tout à fait inutile de transformer l'écriture de $f(x)$ pour dériver *f* comme un quotient. C'est plus compliqué et sans intérêt. En général, pour dériver une fonction on ne modifie pas l'expression de la fonction donnée au départ).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$$

Comme il a été dit précédemment, il vaut mieux éviter de donner l'expression de la dérivée sous la forme d'un quotient car cela ne présente aucun intérêt.

3°) **Tableau de variation de *f***

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$	0	$-$	
Signe de e^{-x}		$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

$$f(1)=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

4°) Démontrons que *f* est une solution particulière de l'équation différentielle $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ (E).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)+x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$$

Donc *f* est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

IV.

$f_k(x)=\ln x-kx$

f_k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

1°) Calculons les limites de f_k en $+\infty$ et en 0^+.

Limite en $+\infty$:

On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=x\times\left(\frac{\ln x}{x}-k\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=+\infty$.

Limite en 0^+ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}(-kx)=0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0^+} f_k(x)=-\infty$.

2°) La fonction f_k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad f_k'(x)=\frac{1}{x}-k=\frac{1-kx}{x}$$

3°)

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
Signe de $1-kx$		$+$	0	$-$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'_k(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f_k	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\ln k-1$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f_k admet un maximum obtenu pour $x=\frac{1}{k}$.

Ce maximum est égal à : $f_k\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-k\times\frac{1}{k}=-\ln k-1$.

Remarques de rédaction :

Attention, rédaction fausse : « La courbe $\mathcal{C}_k$ admet un maximum obtenu pour $x=\frac{1}{k}$ ».

On peut aussi utiliser le verbe « atteindre ».

4°) Déterminons pour quelle valeur de k la courbe $\mathcal{C}_k$ passe par le point $\text{A}(1\,;-3)$.

$$\begin{aligned} \text{A} \in \mathcal{C}_k &\Leftrightarrow f_k(1) = -3 \\ &\Leftrightarrow \ln 1 - k \times 1 = -3 \\ &\Leftrightarrow -k = -3 \\ &\Leftrightarrow k = 3 \end{aligned}$$

5°) Déterminons pour quelles valeurs de k la courbe $\mathcal{C}_k$ est entièrement située en dessous de l'axe des abscisses.

Soit P la phrase : « La courbe $\mathcal{C}_k$ est entièrement située en dessous de l'axe des abscisses ».

$$\begin{aligned} P &\Leftrightarrow -\ln k - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \ln k > -1 \\ &\Leftrightarrow \ln k > \ln \frac{1}{\text{e}} \\ &\Leftrightarrow k > \frac{1}{\text{e}} \end{aligned}$$

V. $f(x) = \dfrac{\text{e}^{2x} - 1}{\text{e}^{2x} + 1}$

1°) **Limite de f en $+\infty$**

On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\text{e}^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}\right)}{\text{e}^{2x}\left(1 + \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}\right)} = \frac{1 - \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^{2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Conséquence graphique pour $\mathcal{C}$:

$\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

Il y avait une autre possibilité de réécriture (moins naturelle cependant) :

$$f(x) = \frac{\text{e}^{2x}}{\text{e}^{2x} + 1} - \frac{1}{\text{e}^{2x} + 1} = \frac{\cancel{\text{e}^{2x}}}{\cancel{\text{e}^{2x}}\left(1 + \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}\right)} - \frac{1}{\text{e}^{2x} + 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}} - \frac{1}{\text{e}^{2x} + 1}$$

Par contre, une réécriture fausse était donnée par $f(x) = \text{e}^{2x} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{\text{e}^{2x}}}$.

2°) **Dérivée de f**

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ (celle du dénominateur ne s'annulant pas).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2\text{e}^{2x}\left(\text{e}^{2x} + 1\right) - \left(\text{e}^{2x} - 1\right) \times 2\text{e}^{2x}}{\left(\text{e}^{2x} + 1\right)^2} = \frac{2\text{e}^{4x} + 2\text{e}^{2x} - 2\text{e}^{4x} + 2\text{e}^{2x}}{\left(\text{e}^{2x} + 1\right)^2} = \frac{4\text{e}^{2x}}{\left(\text{e}^{2x} + 1\right)^2}$$

3°) **Tableau de variations de f**

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de 4e^{2x}	$+$
Signe de $\left(\text{e}^{2x}+1\right)^2$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow 1$

f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$$f(0) = \frac{\text{e}^{2 \times 0} - 1}{\text{e}^{2 \times 0} + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

4°) Déterminons l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point O.

Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point O s'écrit $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{4\text{e}^{2 \times 0}}{\left(\text{e}^{2 \times 0} + 1\right)^2} = \dfrac{4}{2^2} = 1$

T a pour équation réduite $y = x$.

Attention :

Rédiger l'équation d'une tangente.

Une équation de T s'écrit : $y = \ldots$.
Mauvais : T : $y = \ldots$
Pire : $T = 2x + 1$.

5°) Le graphique qui représente la courbe $\mathcal{C}$ est ② (on regarde en particulier l'asymptote en $+\infty$ et la tangente au point O).

Bonus

$\boxed{1}$ $y-2y'=0 \Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}y$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=\frac{1}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

On cherche *k* tel que $f(0)=1$.

$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0}=1$

$\Leftrightarrow k\times 1=1$

$\Leftrightarrow k=1$

La fonction *f* est donc définie par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

On peut aussi écrire $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

$\boxed{2}$ $f: x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$

Démontrons que $\forall x\in[0\,;1]$ $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.

f est dérivable sur $[0\,;1]$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[0\,;1]$ (celle du dénominateur ne s'annulant pas).

$\forall x\in[0\,;1]$ $f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$

Tableau de variations de *f*

x	0		1
Signe de e^{-x}		$+$	
Signe de $x-1$		$-$	0
Signe de $(2-x)^2$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0
Variations de *f*	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$

f est décroissante sur $[0\,;1]$.

On a $f(0)=\frac{1}{2}$ et $f(1)=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

On en déduit que $\forall x\in[0\,;1]$ $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.

Barème

II et **III** : barème « bête » : 1 point par question.

IV. 1°) 1 2°) 0,5 3°) 1 4°) 0,5 5°) 1

V. 1°) 1 2°) 0,5 3°) 1 4°) 1 5°) 0,5