TS3	Contrôle de mathématiques Samedi 8 novembre 2008 (4 heures)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

☐ L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un cartouche de présentation avec le numéro des exercices.
☐ Rendre l'énoncé dans la copie.

L'absence de soin pour la présentation ou l'orthographe sera pénalisée.

I. (2 points) Questions de cours

1°) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et l un réel.

Donner le définition de « f possède la limite l en $+\infty$ ».
2°) Citer et démontrer le théorème des gendarmes pour trois fonctions g, f et h qui prouve que f admet une limite finie l en $+\infty$.

II. (9 points)

Compléter directement les cases de droite du tableau ci-dessous.
Aucune justification n'est demandée sur la copie. Une réponse fausse n'est pas pénalisée.

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-e^{2x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. On pourra écrire : $f(x)=x^2\left[1-\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2\right]$ pour tout réel x non nul.	
On considère la fonction f définie par $f(x)=(x+2)e^{-x}$. Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.	
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x-4$ si $x\in\left]-\infty\,;-2\right]$ et $f(x)=2-x-x^2$ si $x\in\left]-2\,;+\infty\right[$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?	
Donner le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2x^3-3x^2=-\dfrac{1}{2}$.	
Déterminer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$. On pourra écrire $\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}$.	
On considère la fonction f définie par $f(x)=(x^2-2x-3)e^x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.	
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{2x-1}}$.	
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$. On pourra utiliser le changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.	

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit a un réel quelconque. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a. Déterminer en fonction de a l'abscisse du point d'intersection B de T avec l'axe (Ox).	

III. (6 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = x + \mathrm{e}^{1-x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2°) a) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. À l'aide de ce résultat, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\mathrm{e}^x\right)$ en détaillant la démarche.

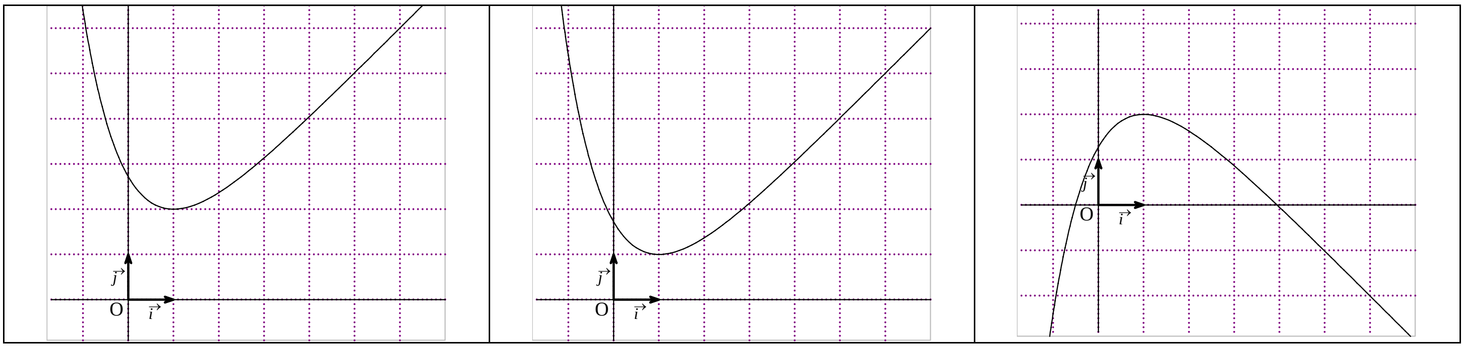
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$. On pourra utiliser l'égalité : $f\left(x\right) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$ après l'avoir démontrée.

3°) Justifier avec soin la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'\left(x\right)$ et étudier son signe avec soin.

Dresser le tableau de variations de f avec les limites (flèches à la règle) et la valeur de l'extremum.

4°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

5°) La courbe $\mathcal{C}$ est représentée sur l'un des trois graphiques ci-dessous. Choisir lequel sans justifier en mettant la lettre $\mathcal{C}$ à côté de la courbe correspondante et compléter avec le tracé de la droite $\mathcal{D}$ et de la tangente horizontale. Indiquer les cordonnées du point correspondant à l'extremum avec des pointillés.



6°) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de m l'équation $f\left(x\right) = m$ admet deux solutions de signes contraires. Aucune explication n'est demandée sur la copie.

IV. (3 points) Le but de cet exercice est d'établir un encadrement de e et d'en déduire la limite d'une suite.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

2°) En déduire que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ (1) et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$ (2).

3°) a) En utilisant (1), démontrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

b) En utilisant (2), démontrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \mathrm{e}$.

Ainsi pour tout entier naturel n non nul, on obtient : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

4°) À l'aide de cet encadrement, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.