TS 3 — Devoir pour le lundi 8 novembre 2010

I.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 1$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3°) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
5°) Justifier par le calcul que α appartient à l'intervalle]0 ; 1[.
6°) On considère l'algorithme de dichotomie rédigé en langage naturel suivant :

Entrée : Introduire un nombre entier naturel n

Initialisation : Affecter à N la valeur n.
Affecter à a la valeur 0.
Affecter à b la valeur 1.

Traitement : Tant que $b - a > 10^{-N}$
Affecter à m la valeur $\frac{a+b}{2}$.
Affecter à P le produit $f(a) \times f(m)$.
Si $P > 0$, affecter à a la valeur m.
Si $P \leqslant 0$, affecter à b la valeur m.

Sortie : Afficher a.
Afficher b.

a) On a fait fonctionner cet algorithme pour $n = 2$. Compléter le tableau ci-dessous donnant les différentes étapes.

	m	P	a	b	$b - a$
Initialisation			0	1	
Étape 1					
Étape 2					
Étape 3	0,625	−0,029 446 59	0,5	0,625	0,125
Étape 4	0,562 5	0,002 244 98	0,562 5	0,625	0,062 5
Étape 5	0,593 75	−0,000 960 45	0,562 5	0,593 75	0,031 25
Étape 6	0,578 125	−0,000 391 37	0,562 5	0,578 125	0,015 625
Étape 7	0,570 312 5	−0,000 112 22	0,562 5	0,570 312 5	0,007 812 5

b) Cet algorithme détermine un encadrement de α.
Quel encadrement de α peut-on écrire à la fin de l'algorithme ?
Quelle influence le nombre entier n, introduit au début de l'algorithme, a-t-il sur l'encadrement obtenu ?

7°) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Question facultative : programmer cet algorithme sur ALGOBOX.

II. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(1, 0).

Travail informatique sur *Geogebra*

1°) Dans *Saisie* (en bas de la figure), commencer par définir la fonction f : $f(x) = \exp(x)$. Appuyer sur *Entrée*.

2°) Dans *Saisie*, définir le point B en tapant B = (1, 0) (respecter la virgule). Appuyer sur *Entrée*.

3°) Définir un paramètre réel a à l'aide du bouton Curseur (6e colonne de boutons en partant de la gauche).
Il faut cliquer à un endroit quelconque de la figure.

4°) Dans *Saisie*, taper Tangente[a,f] (respecter la virgule et les crochets).

5°) Changer la valeur de a à l'aide du curseur. Pour cela, cliquer sur le bouton *Déplacer* (1er bouton en partant de la gauche) et déplacer le curseur de sorte que la tangente passe par le point B.

Conjecturer alors la valeur de a telle que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par le point B.

Il est inutile d'imprimer ce travail.

Refaire ce travail sans lire les indications fournies dans l'énoncé.
Une variante consisterait à définir le point A = (a, f(a)) puis la tangente en A en tapant Tangente[A, f].

Travail mathématique sur la copie

1°) Déterminer une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a (a réel quelconque).

Rédiger convenablement selon le modèle suivant :

« Une équation de T_a s'écrit : y = …. soit y = …. y = …. . »

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(1, 0).

On rédigera ainsi sous la forme :

« B $\in T_a$ si et seulement si …
si et seulement si … . »

On conclura ainsi :
La tangente