Exercices sur la géométrie dans l'espace

Dans tous les exercices, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sauf ceux où il n'y a pas besoin de repère.

1 Soit D la droite d'équations $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{a}$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et P le plan d'équation cartésienne $x + 6y + 5z - 1 = 0$.
Déterminer a tel que D // P.

2 On considère le plan P d'équation $x - y + 2z = 3$. On note A le point de coordonnées (1 ; 0 ; 1).
Déterminer deux droites perpendiculaires D et D' incluses dans P et passant par A telles que D soit « horizontale » c'est-à-dire de vecteur directeur orthogonal à $\vec{k}$.

3 On considère les points A(1 ; – 1 ; 2) et B(2 ; 0 ; 4) ainsi que le plan P d'équation cartésienne $x - y + 3z - 4 = 0$.
1°) Démontrer qu'il existe un unique plan Q passant par A et B perpendiculaire à P.
2°) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

4 Pour tout réel λ, on note P_λ le plan d'équation cartésienne $\lambda x+(\lambda+1)y+z-1=0$.
Démontrer que, pour tout réel λ, P_λ est perpendiculaire au plan Q d'équation cartésienne $x - y + z = 0$ et passe par le point A(1 ; – 1 ; 2).

5 Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre J(0 ; 1 ; 0) et de rayon 1.
Soit u et v deux réels. On note M et N les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=u\vec{k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=v\vec{i}$ où A(0 ; 2 ; 0).
1°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
2°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (MN).
3°) Démontrer que la sphère $\mathcal{S}$ est tangente à (MN) si et seulement si $u^2v^2=4$.
4°) Démontrer que la relation précédente est équivalente à OM + AN = MN.

6 Soit D la droite passant par le point A(0 ; 0 ; 1) et admettant le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ pour vecteur directeur.
Soit D' la droite passant par le point B(0 ; 0 ; – 1) et admettant le vecteur $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ pour vecteur directeur.
1°) Vérifier que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.
2°) On note Σ l'ensemble des points de l'espace équidistants de D et D'.
a) Démontrer que O appartient à Σ.
b) Démontrer qu'un point M(x ; y ; z) appartient à Σ si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$.
3°) Déduire de cette relation :
- les intersections de Σ avec des plans orthogonaux à la droite de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{k}\right)$; préciser le cas d'exception.
- la nature des intersections de Σ avec des plans orthogonaux aux axes de repères $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$ et $\left(\mathrm{O}, \vec{j}\right)$.

4°) Démontrer que Σ admet les axes de coordonnées pour axes de symétrie.

7 On donne la droite D d'équations $3x + 4y - z + 1 = 0$ et $x + y + 2z + 2 = 0$.
Calculer la distance de l'origine à cette droite.

8 On donne les points A(2 ; – 1 ; 1) et A′(0 ; 2 ; 1) ainsi que les vecteurs $\vec{u}(-1\,;2\,;1)$ et $\vec{u'}(2\,;\,-3\,;1)$.
On note D et D' les droites de repères respectifs $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$ et $\left(\mathrm{A'}, \vec{u'}\right)$.
Déterminer la perpendiculaire commune Δ à D et D'.
Calculer la distance entre D et D'.

9 On considère le plan P d'équation cartésienne $-5x + 4y + 3z + 2 = 0$ et D la droite définie par les équations cartésiennes $-x + 5y - 5 = 0$ et $-2x + 3y + z - 1 = 0$.
1°) Déterminer une représentation paramétrique de D.
2°) Démontrer que $D \subset P$.
3°) Pour tout réel m, on définit le plan Q_m d'équation cartésienne $-x+5y-5+m(-2x+3y+z-1)=0$.
a) Démontrer que $D \subset Q_m$.
b) Déterminer m tel que $Q_m \perp P$.

10 On considère les points A(– 1 ; – 1 ; 0) et B(2 ; – 2 ; – 2). Soit $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre [AB] et P le plan d'équation cartésienne $x+3y-2z=0$.
Déterminer les plans parallèles à P et tangents à $\mathcal{S}$.

11 **Projection de l'angle droit**
Soit ABC un triangle rectangle en A et A', B', C' les projetés orthogonaux des points A, B, C sur un plan P de vecteur normal unitaire $\vec{n}$.
1°) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+a\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+b\vec{n}$.
2°) Démontrer successivement que :
$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}$; $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}$; $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}=-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}\right)\times\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}\right)$.
3°) En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ sont orthogonaux si et seulement si la droite (AB) ou la droite (AC) est parallèle au plan P.
4°) **Application**
À quelle condition un parallélogramme ABCD se projette-t-il orthogonalement sur P en un losange ? un carré ? un rectangle ?

12 Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équations $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-2y-1=0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équations $\begin{cases} x=z+4 \\ y=2z+3 \end{cases}$.
Déterminer les sphères contenant $\mathcal{C}$ et tangentes à $\mathcal{D}$.

13 Soit P le plan d'équation cartésienne $y - z + 2 = 0$.
1°) Démontrer que les plans d'équations cartésiennes $x = 0$ et $\lambda x+y+z=0$ (λ réel quelconque) sont perpendiculaires à P et passent par l'origine du repère.
2°) Réciproquement, soit Q un plan perpendiculaire à P passant par O.
a) Démontrer qu'il existe deux réels a et b avec $(a, b)\neq(0, 0)$ tels que Q admette une équation cartésienne de la forme $ax+b(y+z)=0$.
b) En examinant les cas $b = 0$ et $b \neq 0$, démontrer que Q a pour équation $x = 0$ ou $\lambda x + y + z = 0$ (λ réel quelconque).

14 Soit ABCD un tétraèdre. Soit I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA].
1°) Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
2°) Démontrer que $\left(\mathrm{I}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$ est un repère du plan (IJK).
3°) Pour tout point M de la droite (AB) et tout point N de la droite (CD), on note P le milieu de [MN].
Démontrer l'ensemble des points P est le plan (IJK).

15 On donne un triangle ABC. Déterminer l'ensemble
- $\mathcal{E}_1$ des points M de l'espace tels que $\left(2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\wedge\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{0}$;
- $\mathcal{E}_2$ des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-3\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\wedge\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}}+3\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)=\vec{0}$;
- $\mathcal{E}_3$ des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)\wedge\left(3\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}-4\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)=\vec{0}$.

16 Calculer la distance du point A(1 ; – 1 ; 2) à la sphère *S* d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2+2x-2y-3=0$.

17 **Tétraèdre dont les quatre faces ont des aires égales**

Le but de l'exercice est de démontrer que dans un tétraèdre, si les faces ont des aires égales, alors les arêtes opposées ont des longueurs égales.
Soit ABCD un tétraèdre dont les quatre faces ont des aires égales.
On oriente l'espace.

1°) La perpendiculaire commune à (AB) et à (CD) coupe ces droites en I et J respectivement.
a) Démontrer que l'on a : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC}\right\|^2$.
b) Démontrer que l'on a : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JD}\right\|$.
En déduire que J est le milieu de [CD].
c) Démontrer que I est le milieu de [AB].
2°) a) Démontrer que l'on a : $\text{AC}^2=\text{AI}^2+\text{IJ}^2+\text{JC}^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JC}$ et $\text{BD}^2=\text{BI}^2+\text{IJ}^2+\text{JD}^2+2\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{JD}$.
b) En déduire que $\text{AC}=\text{BD}$.
3°) Pour conclure, indiquer comment on démontre que BA = CD et BC = DA.

18 On considère un plan *P* de l'espace, et un cercle $\mathcal{C}$ de *P*, de diamètre [AB].
Soit Δ la droite passant par A et orthogonale à *P*, et S un point de Δ distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS), et à tout point M de $\mathcal{C}$ on associe le projeté orthogonal H de A sur la droite (MS).
Le but de l'exercice est la recherche du lieu de H lorsque M décrit $\mathcal{C}$.
1°) Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B.
Démontrer que (AH) est orthogonale au plan (BMS).
En déduire que H est un point du plan Π passant par I et orthogonal à la droite (BS).
2°) Démontrer que H est un point de la sphère Σ de diamètre [AS].
3°) Quel est l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt $\mathcal{C}$?

19 1°) On considère un triangle ABC, rectangle en A, et, sur la droite passant par A et orthogonale au plan (ABC), un point D distinct de A. Démontrer que deux arêtes opposées quelconques sont orthogonales.
2°) La question 1° prouve l'existence de tétraèdres dont les arêtes opposées sont orthogonales.
Démontrer qu'un tétraèdre régulier est de ce type :
a) en démontrant que le plan médiateur d'une arête contient l'arête opposée ;
b) en utilisant le produit scalaire.
3°) On considère un tétraèdre quelconque ABCD.
a) Démontrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
b) On considère les trois paires d'arêtes opposées : {[AB], [CD]} ; {[AC], [DB]} ; {[AD], [BC]}.
Démontrer que si les arêtes de deux paires sont orthogonales, alors il en est de même des arêtes de la troisième paire.

20 **Le théorème de Descartes**

On considère un tétraèdre OABC rectangle en O, c'est-à-dire un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux à deux orthogonaux.
1°) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$ (on oriente l'espace).
2°) En déduire que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles OAB, OBC et OCA.

21 Dans l'espace, on considère quatre points A, B, C et D non coplanaires.
Démontrer que l'aire d'une face du tétraèdre ABCD est strictement inférieure à la somme des aires des trois autres faces.

22 On considère un tétraèdre ABCD.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.
1°) Démontrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
Dans la suite de l'exercice, on suppose que AB = CD, BC = AD et AC = BD. (On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).
2°) a) Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.
b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3°) a) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
b) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (MK) ; en déduire que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB).
Démontrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
c) Démontrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].
d) Démontrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

23 Soit *P* et *P'* deux plans perpendiculaires sécants suivant une droite *D*.
Soit M un point quelconque de l'espace.
On note H son projeté orthogonal sur *P*, H' son projeté orthogonal sur *P'* et K son projeté orthogonal sur *D*.

Démontrer que l'on a : $\text{MK}^2=\text{MH}^2+\text{MH}'^2$.

24 À tout réel *m*, on associe le plan P_m d'équation cartésienne $mx+y+(m-1)z+2m+1=0$.
1°) Démontrer que les plans P_0 et P_1 se coupent suivant une droite Δ.
2°) Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
3°) Démontrer que la droite Δ est contenue dans chaque plan P_m.

25 On considère le plan *P* d'équation $x+2y+3z+6=0$ et la droite *D* de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+t \\ y=\dfrac{1}{2}-3t \\ z=2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1°) Vérifier que les points A(1 ; – 1 ; 1) et B(3 ; –7 ; 5) appartiennent à la droite *D*.
2°) Déterminer les coordonnées des points A' et B' projetés orthogonaux respectifs de A et B sur *P*.
3°) Déterminer une équation paramétrique de la droite *D'*, projection orthogonale de *D* sur le plan *P*.

26 **Le théorème de Pappus**

1°) Soit *D* et *D'* deux droites sécantes de l'espace. Soit A, B, C trois points de *D*, A', B', C' trois points de *D'*.
Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{B'A}\wedge\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{C'B}\wedge\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{A'C}\wedge\overrightarrow{AC'}=\vec{0}$ (on oriente l'espace).
2°) En déduire une démonstration du théorème de Pappus dont l'énoncé est :

« Si A, B, C sont trois points alignés, si A', B', C', sont trois points alignés tels que (BC') est parallèle à (B'C) et (AC') parallèle à (A'C), alors (AB') est parallèle à (A'B). »

Notes :

1. Voici un exemple de problème de géométrie plane résolu par « passage à l'espace ».
2. Pappus (fin III^e siècle). Son œuvre est une synthèse de la géométrie de l'Antiquité. Les résultats n'en seront améliorés que mille ans plus tard.

27 Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace.
Déterminer l'ensemble Δ des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

28 Un tétraèdre ABCD possède six arêtes, qui déterminent trois paires d'arêtes dites" arêtes opposés", qui sont {(AB), (CD)}, {(BC), (AD)} et {(CA), (BD)}.
On appelle aussi hauteur d'un tétraèdre toutes droites contenant un sommet du tétraèdre et perpendiculaire au plan contenant la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre possède donc quatre hauteurs, notées respectivement h_A , h_B , h_C et h_D ; la hauteur h_A étant celle contenant le point A et perpendiculaire au plan (BCD).
1°) Démontrer que si les quatre hauteurs h_A , h_B , h_C et h_D du tétraèdre ABCD sont concourantes, alors les paires d'arêtes opposées sont orthogonales.
2°) Réciproquement, on suppose qu'un tétraèdre ABCD possède trois paires d'arêtes orthogonales.
Justifier que les hauteurs h_A et h_B ont un point commun qui appartient aussi aux deux autres hauteurs de ABCD.
3°) Donner alors une C.N.S. pour que les hauteurs d'un tétraèdre soient concourantes.
Un tétraèdre ayant ses quatre hauteurs concourantes est dit orthocentrique, le point de concours de ses hauteurs étant l'orthocentre.
a) Démontrer que pour tout point A, B, C, D de l'espace, on a
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
(2) $\left(AB^2 + CD^2\right) - \left(AC^2 + BD^2\right) = 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$
b) En déduire que le tétraèdre ABCD est orthocentrique si et seulement si il possède deux paires d'arêtes opposées orthogonales.
En déduire que le tétraèdre ABCD est orthocentrique si et seulement si les longueurs de ses côtés vérifient $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
4°) Justifier que :
a) tout tétraèdre régulier est orthocentrique ;
b) tout tétraèdre trirectangle est orthocentrique.

29 Soit *D* et *D'* deux droites de l'espace.
Déterminer l'ensemble des milieux I des segments [MM'] lorsque M ∈ *D* et M' ∈ *D'*.

30 On considère la droite $\boldsymbol{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et la droite $\boldsymbol{D}'$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
Les droites $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$ sont-elles coplanaires ?

31 Déterminer la droite Δ orthogonale à la droite $\boldsymbol{D}$ définie par le système $\begin{cases} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{cases}$, la coupant, et passant par O.

32 Soit A, B, C, D quatre point de l'espace orienté $\boldsymbol{E}$ tels que A ≠ B et C ≠ D.
On se propose de déterminer l'ensemble *S* des points M ∈ $\boldsymbol{E}$ tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.
1°) Déterminer *S* lorsque les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I.
2°) On se place dans le cas où (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. Préciser *S*.
3°) Déterminer *S* lorsque les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Préciser *S* lorsque $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et aussi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

33 Déterminer, si possible, la perpendiculaire commune aux deux droites, et calculer leur distance :

a) $\boldsymbol{D}_1 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 5z = 2 \end{cases}$ et $\boldsymbol{D}_2 \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - 5z = 3 \end{cases}$

b) $\boldsymbol{D}_1 : x = y = z$ et $\boldsymbol{D}_2 \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$

c) $\boldsymbol{D}_1 : x = y = z$ et $\boldsymbol{D}_2 \begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases}$

34 **Point de Monge et tétraèdre orthocentrique**

Partie 1 Point de Monge

Le point de Monge d'un tétraèdre ABCD est le point M_0 défini par $\overrightarrow{OM_0} = 2\overrightarrow{OG}$ où O est le centre de la sphère circonscrite et G le centre de gravité du tétraèdre.
1°) Démontrer que $\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} + \overrightarrow{M_0C} + \overrightarrow{M_0D} = 2\overrightarrow{M_0O}$.
En déduire la valeur du produit scalaire $2\,\overrightarrow{M_0I} \cdot \overrightarrow{CD}$, où I est le milieu de [AB].
2°) En déduire que M_0 appartient aux six plans passant par le milieu d'une arête et orthogonaux à l'arête opposée.

Partie 2 Tétraèdre orthocentrique

On reprend les notations précédentes.
Chacune des droites, passant par un sommet du tétraèdre et orthogonale au plan de la face opposée, est appelée hauteur du tétraèdre. Les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas forcément concourantes (cf. question 1°).
Un tétraèdre orthocentrique est un tétraèdre dont les hauteurs sont concourantes, et le point de concours est alors l'orthocentre du tétraèdre.
On se propose de donner quelques caractérisations des tétraèdres orthocentriques.

1°) **Contre-exemple**
Choisir quatre sommets d'un cube de façon à construire un tétraèdre non orthocentrique.

2°) **Caractérisation par les arêtes**
a) Soit ABCD un tétraèdre orthocentrique d'orthocentre H.
Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ en utilisant le point H.
En déduire que les arêtes opposées sont orthogonales.
b) Réciproquement, soit ABCD un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales.
Démontrer que le point de Monge M_0 appartient à chacune des hauteurs.
En déduire que ABCD est orthocentrique d'orthocentre H tels que $\overrightarrow{OH} = 2\,\overrightarrow{OG}$ (relation d'Euler).

3°) **Caractérisation métrique**
a) Démontrer que les arêtes (AB) et (CD) d'un tétraèdre ABCD sont orthogonales si et seulement si $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. (On pourra par exemple utiliser le théorème de la médiane.)
b) En déduire qu'un tétraèdre est orthocentrique si et seulement si la somme des carrés des longueurs de deux arêtes opposées est constante.

4°) **Caractérisation par les projetés orthogonaux**
Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) le tétraèdre est orthocentrique ;
b) le projeté orthogonal de chaque sommet sur la face opposée est l'orthocentre du triangle correspondant ;
c) le projeté orthogonal d'au moins un sommet sur la face opposée est l'orthocentre du triangle correspondant

35 1°) Quel est le volume maximum d'un cylindre, ayant même axe de révolution qu'un cône donné et intérieur à ce cône ?
2°) Quel est le volume maximal d'une boule centrée sur cet axe et intérieure au cône ? Comparer les deux maximums trouvés.

36 On considère un tétraèdre régulier ABCD, c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont même longueur $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On rappelle que deux arêtes d'un tétraèdre sont dites opposées si elles ne sont pas incluses dans une même face.
Soit I, J, K, L, M, N, les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC], [AD], [AC], [BD].
1°) a) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire commune aux arêtes (AB) et (CD).
b) Justifier que les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires.
2°) Démontrer que IKJL, IMJN et KMLN sont trois carrés dont le coté a pour longueur $\frac{a}{2}$.
3°) En déduire que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes et perpendiculaires deux à deux en l'isobarycentre de {A, B, C, D}.
4°) Conclure qu'il existe une sphère S de centre G, tangente aux six arêtes du tétraèdre régulier ABCD dont on précisera le rayon à l'aide de a.
5°) Soit $\mathcal{R}$ le polyèdre, réunion des deux pyramides de même base carrée IMJN de sommets respectifs K et L.
Vérifier que les huit faces de ce polyèdre sont des triangles équilatéraux isométriques.
Calculer le volume de ce polyèdre $\mathcal{R}$ appelé octaèdre régulier.

37 On considère les droites D_1 et D_2 définies par les équations $D_1 \begin{cases} x+y=2 \\ y-2z=3 \end{cases}$ et $D_2 \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=a \end{cases}$ où a est un réel.
Déterminer a pour que les droites D_1 et D_2 soient coplanaires.

38 Soit A, B, C trois points fixés de l'espace E orienté.
On considère la fonction $\vec{\varphi}$ de E dans $\vec{E}$ définie par $\vec{\varphi}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MA}}$.
Démontrer que $\vec{\varphi}$ est constante.

39 Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O.
1°) Démontrer que les aires des triangles AOB, BOC, COD et DOA vérifient :
$\mathcal{A}_{\mathrm{AOB}} + \mathcal{A}_{\mathrm{BOC}} = \mathcal{A}_{\mathrm{COD}} + \mathcal{A}_{\mathrm{DOA}}$.
2°) En déduire l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (1).
3°) Soit I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].
En utilisant (1), démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ sont colinéaires.

40 On considère les plan $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives $2x + y - 3z + 1 = 0$ et $x - y + 2 = 0$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point O et contenant la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

41 On considère les trois plans P_1, P_2, P_3 donnés par leurs équations :
$P_1 : ax + y + z + 1 = 0$; $P_2 : x + ay + z - 1 = 0$; $P_3 : x + y + z - a = 0$ où a désigne un réel donné.

1°) Démontrer que P_1 et P_2 sont sécants si et seulement si $a \neq 1$.
2°) On suppose que $a \neq 1$.
Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ d'intersection des plans P_1 et P_2.
3°) Déterminer les conditions pour que P_1, P_2, P_3 soient sécants suivant une droite.

42 Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct, on donne les points A(2 ; 0 ; 1), B(3 ; – 2 ; 0) et C(2 ; 8 ; – 4).
Déterminer le point M de l'espace tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{CM}}$.

Réponses

$\boxed{1}$ Donner un système d'équations paramétriques de D en prenant z pour paramètre.
Un vecteur directeur de D est $(2, -3, a)$.

$a = \dfrac{16}{5}$

$\boxed{2}$ π : plan passant par A et parallèle à (xOy)

$\pi : z = 1$

π' : plan passant par A et orthogonal à D

$D\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $D'\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

$\boxed{3}$ 1°) $Q = \text{A} + \text{Vect}\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \vec{n}\right)$ (on vérifie que $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires) 2°) $Q : 5x - y - 2z - 2 = 0$

$\boxed{4}$

$\boxed{5}$ 1°) M(0 ; 0 ; u) N(v ; 2 ; 0)

2°) $\text{P} \in (\text{MN}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{P} = \text{M} + \lambda\overrightarrow{\text{MN}}$

$\begin{cases} x = \lambda v \\ y = 2\lambda \\ z = u - \lambda u \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

3°) $\boldsymbol{S}$: $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

$\lambda^2\left(u^2 + v^2 + 4\right) - \lambda\left(2u^2 + 4\right) + u^2 = 0$

On exprime que le discriminant (ou que le discriminant réduit) de cette équation est nul.

$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\vec{u} \wedge \vec{u}'(5 ; 3 ; -1)$ $\quad \begin{cases} y + 3z - 5 = 0 \\ 5x - 4y + 13z + 27 = 0 \end{cases}$; $d(D, D') = \dfrac{1}{\sqrt{35}}$

Doute sur le – 27

$\boxed{9}$ 1°) $D\begin{cases} x = \dfrac{5}{7}\lambda + \dfrac{10}{7} \\ y = \dfrac{\lambda}{7} + \dfrac{9}{7} \end{cases}$ $\quad$ 3°) b) $m = -1$

$\boxed{10}$ $x + 3y - 2z + 9 = 0$ ou $x + 3y - 2z - 5 = 0$

Le rayon de la sphère est égal à

10) rayon de la sphère : $\dfrac{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ $\qquad$ centre O$\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, -1\right)$

Une équation des plans parallèles à $\mathcal{P}$ est : $x + 3y - 2z + \lambda = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$d(O, \mathcal{P}') = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 2 + \lambda\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-2 + \lambda|}{\sqrt{14}}$

$\mathcal{P}'$ tangent à $\mathcal{S} \Leftrightarrow d(O, \mathcal{P}') = \dfrac{\sqrt{14}}{2} \Leftrightarrow |-2 + \lambda| = 7 \Leftrightarrow \lambda = 9$ ou $\lambda = -5$

Les plans parallèles à $\mathcal{P}$ et tangents à $\mathcal{S}$ sont les plans d'équation $x + 3y - 2z + 9 = 0$ et $x + 3y - 2z - 5 = 0$

Le plan est tangent si et seulement si d(W ; P')

x + 3y – 2z +

$\boxed{11}$ $\boxed{12}$ $\boldsymbol{C}$ est le cercle de centre $\Omega(0 ; 1 ; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

$I\left|\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{array}\right.$; $x^2 + (y-1)^2 + (z-\alpha)^2 = \dfrac{5\alpha^2 + 20\alpha + 50}{6}$ (fausse)

$x^2 + (y-1)^2 + (z-\alpha)^2 = 3 + \alpha^2$

On remplace x par z + 4 et y par 2z + 3.

$(z+4)^2 + (2z+2)^2 + (z-\alpha)^2 = 3 + \alpha^2$

On cherche α tel que cette équation admette une racine double dans ℝIR.

$6z^2 + (16 - 2\alpha)z + 17 = 0$

Le discriminant réduit est égal à $(8-\alpha)^2 - 6 \times 17 = (8-\alpha)^2 - 102$

$\alpha = 8 \pm \sqrt{102}$

On trouve : $\alpha = 8 \pm 6\sqrt{3}$ (faux).

14 3°) $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right)=\frac{1}{2}\left(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{CD}\right)$

15 $\mathcal{E}_1=G+\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{BC}\right)$; $\mathcal{E}_2=(G_1G_2)$; $\mathcal{E}_3=G+\mathrm{Vect}\left(3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

17 1°) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$. b) Utiliser $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|^2$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|^2$

21 Cela ressemble assez à une situation classique dans le plan : pour un triangle non réduit à un point ou à un segment, la longueur d'un côté est strictement inférieure à la somme des longueurs de deux autres côtés.

1ère méthode :

On sait que $\mathcal{A}$ (BDC) = $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|$.

$\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\wedge\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=...=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\left\|\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|\leq\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|+\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|+\left\|\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$\mathcal{A}$ (BDC) $\leqslant \mathcal{A}$ (ABC) + $\mathcal{A}$ (ABD) + $\mathcal{A}$ (ADC)

2e méthode :

Notons H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

Notons $\mathcal{A}$ (UVW) l'aire d'un triangle UVW.
Considérons le projeté orthogonal A' de A sur la droite (BC). C'est aussi le projeté orthogonal de H sur (BC).
$\mathcal{A}$ (BHC) $=\dfrac{BC\times HA'}{2}$ alors que $\mathcal{A}$ (ABC) $=\dfrac{BC\times AA'}{2}$.
Dans le triangle AA'H rectangle en H, on a AA' > A'H, d'où $\mathcal{A}$ (ABC) > $\mathcal{A}$ (BHC).
L'hypoténuse AA' ne peut être égale à A'H que si A = H, ce qui impliquerait que A soit dans le plan (BCD).
On a de même $\mathcal{A}$ (ABD) > $\mathcal{A}$ (BHD) et $\mathcal{A}$ (ACD) > $\mathcal{A}$ (CHD).
En ajoutant ces trois inégalités, on obtient :
$\mathcal{A}$ (ABC) + $\mathcal{A}$ (ABD) + $\mathcal{A}$ (ACD) > $\mathcal{A}$ (BHC) + $\mathcal{A}$ (BHD) + $\mathcal{A}$ (CHD).
Il suffit alors de justifier que $\mathcal{A}$ (BHC) + $\mathcal{A}$ (BHD) + $\mathcal{A}$ (CHD) $\geq \mathcal{A}$ (BCD).

Si H est intérieur au triangle BCD, alors on a : $\mathcal{A}$ (BHC) + $\mathcal{A}$ (BHD) + $\mathcal{A}$ (CHD) = $\mathcal{A}$ (BCD),
et si H est extérieur strictement à ce triangle, on a :
$\mathcal{A}$ (BHC) + $\mathcal{A}$ (HBD) + $\mathcal{A}$ (HCB) > $\mathcal{A}$ (BCD).
On a donc $\mathcal{A}$ (BHC) + $\mathcal{A}$ (BHD) + $\mathcal{A}$ (CHD) $\geq \mathcal{A}$ (BCD) et il s'ensuit que :
$\mathcal{A}$ (ABC) + $\mathcal{A}$ (ABD) + $\mathcal{A}$ (ACD) > $\mathcal{A}$ (BCD).

24 2°) $\Delta=A+\mathbb{R}\vec{w}$ avec A (– 4 ; 1 ; 2) (ou A (– 3 ; 0 ; 1)) et $\vec{w}$ (1 ; – 1 ; – 1)

$$\Delta\begin{cases}x=-3-t\\y=t\\z=1+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

27 On introduit le point O centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

32 1°) S est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

2°) On suppose que $S\neq\varnothing$.

Soit M un point de S. On a alors $\overrightarrow{MC}\bullet\left(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right)=0$ d'où $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)=0$ donc M $\in$ (ABC).
De même, M $\in$ (ABD).
Donc M $\in$ (AB).
Par une démonstration identique, on peut démontrer que M $\in$ (CD).
Absurde.
Donc $S=\varnothing$.

3°) Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, alors $S=\mathcal{E}$.
Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors S est la droite qui passe le milieu I de [AC] et qui est parallèle à (AB).

37 Les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.
On cherche a pour que les droites soient sécantes.
On résout le système formé par les 3 premières équations.
On trouve $x=1$, $y=1$, $z=-1$.
On reporte dans la quatrième équation.
On trouve $a=-4$.

40 $\mathcal{P}$: $x+y-2z=0$

41 2°) $\begin{cases}\left(a^2-1\right)x=\lambda+1-a\\\left(1-a^2\right)y=\lambda-1+a\\z=\lambda\end{cases}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

42 $\begin{cases}-x+y-2z=-4\\-x-y-z=-11\\2x+y-z=8\end{cases}$ M(3 ; 5 ; 3)

Questions de cours

$\boxed{1}$ Distance d'un point à un plan dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Formule et démonstration.

$\boxed{2}$ Donner la formule du double produit vectoriel et faire la démonstration.

$\boxed{3}$ Distance d'un point à une droite de l'espace. Formule et démonstration.

$\boxed{4}$ Distance de deux droites dans l'espace.

$\boxed{5}$ Coordonnées cylindriques dans l'espace orienté. Relation avec les coordonnées cartésiennes.
Coordonnées sphériques dans l'espace orienté (principe). Relation avec les coordonnées cartésiennes.

$\boxed{6}$ Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace. Définition et existence.

$\boxed{7}$ Déterminer la nature de la surface d'équation $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé (*a*, *b*, *c*, *d* sont quatre réels donnés).

$\boxed{8}$ Expression d'un vecteur dans une base orthonormée de l'espace.
Changement de repères orthonormés de l'espace ; « matrice des 9 cosinus ».

$\boxed{9}$ Étudier l'intersection d'une sphère et d'une droite dans l'espace.

$\boxed{10}$ Étudier l'intersection de deux sphères dans l'espace.

$\boxed{11}$ Changement de repère dans l'espace (repère quelconque).
Formules écrites sous forme matricielle.

$\boxed{12}$ Écart angulaire de deux vecteurs non nuls de l'espace.
La notion d'angle orienté existe-t-elle dans l'espace ?

$\boxed{13}$ Norme du produit vectoriel de deux vecteurs non nuls de l'espace à l'aide de leur écart angulaire.
Démonstration à l'aide d'une BOND adaptée.

$\boxed{14}$ Plans de l'espace. Expliquer le schéma :

$$\begin{tikzcd} \text{cartésien} \arrow[r, bend left, "\text{Résoudre}"] & \text{paramétrique} \arrow[l, bend left, "\text{Eliminer}"] \end{tikzcd}$$

Donner des exemples.

$\boxed{15}$ Droites de l'espace. Expliquer le schéma :

$$\begin{tikzcd} \text{cartésien} \arrow[r, bend left, "\text{Résoudre}"] & \text{paramétrique} \arrow[l, bend left, "\text{Eliminer}"] \end{tikzcd}$$

Donner des exemples.

Changer les numéros à partir de cet exercice

$\boxed{16}$ Résolution de l'équation $\vec{u}\wedge\vec{x}=\vec{v}$.

$\boxed{17}$ Soit P_1 et P_2 deux plans sécants. On note $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ deux vecteurs normaux respectifs de P_1 et P_2.
On note $D=P_1\cap P_2$. Donner un vecteur directeur de D.

$\boxed{18}$ Produit mixte de trois vecteurs dans un espace vectoriel orienté de dimension 3.
Expression dans une BON$^+$.
Produit mixte de trois vecteurs formant une BON$^+$.
Caractérisation des bases directes et des bases indirectes.

$\boxed{19}$ Expression du produit vectoriel dans une BON$^+$.

$\boxed{20}$ Puissance d'un point par rapport à une sphère de l'espace. Définition géométrique.
Expression analytique dans un repère orthonormé de l'espace.
Expression de la puissance d'un point à l'aide du produit scalaire de deux vecteurs utilisant les points d'intersection d'une droite passant par ce point.
Plan radical de deux sphères.
Que peut-on dire du plan radical de deux sphères sécantes ?

$\boxed{21}$ Équations paramétriques d'un plan dans l'espace.

$\boxed{22}$ Règle de dédoublement des termes pour l'équation du plan tangent à une sphère donnée sous forme d'une équation cartésienne.