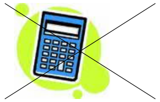
TS3

Interrogation écrite du lundi 11 octobre 2010 (50 minutes)



Répondre très lisiblement et sans ratures en écrivant au stylo à plume. Tirer les traits de fractions à la règle.

Prénom et nom : ……………………………………………………….

Note : …… /20

I. (2 points) On pose $A = e^x \times e^{-x}$, $B = \left(e^{2x}\right)^2 \times \left(e^{-x}\right)^2$, $C = \dfrac{\left(e^{x+1}\right)^{-3} \times e^{-2x+4}}{e^{-x-2}}$, $D = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

(x désigne un réel quelconque). Simplifier ces expressions en détaillant les calculs.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (1 point) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Donner une équation de la tangente en un point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse a. Aucune phrase ni aucune explication n'est demandée.

……

III. (3 points) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1°) Donner **sans justifier** l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Démontrer que f est impaire.
3°) Calculer $f(\ln 2)$. En déduire sans calcul $f(-\ln 2)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (6 points) Donner les ensembles de solutions des équations et inéquations ci-dessous sans justifier.

$e^{\left(x^2\right)} = e \quad (1)$	$e^{-3x} \geqslant 1 \quad (2)$	$xe^x \leqslant 0 \quad (3)$
$S_1 =$ ……………………………..	$S_2 =$ ……………………………..	$S_3 =$ ……………………………..

$e^{-x} + 1 = 0 \quad (4)$	$e^{3x+1} - e^{-x} < 0 \quad (5)$	$\left(e^{\frac{1}{x}-1}\right)^3 = e^2 \times e^{2x} \quad (6)$
$S_4 =$ ……………………………..	$S_5 =$ ……………………………..	$S_6 =$ ……………………………..

V. (2 points) Déterminer les dérivées des fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ données ci-dessous (calculs au brouillon).

$f(x) = \left(x^2 - 2x\right)e^x$ $\qquad f'(x) =$ .... (résultat sous forme factorisée)

$g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad g'(x) =$ .... (tirer le trait de fraction à la règle)

VI. (2 points) Compléter sans détailler les calculs : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 2x\right) =$ .... ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x+1} =$ ......

VII. (1 point) Compléter la phrase suivante en faisant attention à tous les détails.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{y}{2}$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par

……..

VIII. (2 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - e^x + 4$.

Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2e^x - 1$. **On ne demande pas d'étudier ce signe.**

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

IX. (1 point) Démontrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $e^{2x} + 2e^x < 3$. On rédigera de manière concise.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Bonus (1 point)

À traiter sur une feuille à part.

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{e^n}$ est-elle géométrique ?

Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte.

Corrigé de l'interrogation écrite du 11-10-2010

I.

$A = e^{x} \times e^{-x} = e^{0} = 1$

$B = \left(e^{2x}\right) \times \left(e^{-x}\right)^{2} = e^{4x} \times e^{-2x} = e^{2x}$

$C = \dfrac{e^{-3x-3} \times e^{-2x+4}}{e^{-x-2}} = \dfrac{e^{-5x+1}}{e^{-x-1}} = e^{-4x+3}$

$D = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ (on développe chaque carré avec une identité remarquable).

II. Une équation de la tangente au point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse a s'écrit $y = e^{a}(x - a + 1)$.

(Formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où f est la fonction exponentielle).

III. $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$

1°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

2°) Démontrons que f est impaire.

• $\mathcal{D}$ est centré en 0.

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \dfrac{e^{-x} + 1}{e^{-x} + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{e^{x}} - 1}{\dfrac{1}{e^{x}} + 1} = \dfrac{1 - e^{x}}{1 + e^{x}} = -\dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1} = -f(x)$

On en déduit que f est impaire.

3°) Calculons $f(\ln 2)$. Déduisons-en sans calcul $f(-\ln 2)$.

$f(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} - 1}{e^{\ln 2} + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

Comme f est impaire, on en déduit que $f(-\ln 2) = -f(\ln 2) = -\dfrac{1}{3}$.

IV.

1°) $e^{\left(x^{2}\right)} = e \quad (1)$	2°) $e^{-3x} \geqslant 1 \quad (2)$	3°) $xe^{x} \leqslant 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow x^{2} = 1$ $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ $S_1 = \{-1\,;\,1\}$	$(2) \Leftrightarrow -3x \geqslant 0$ $\Leftrightarrow x \leqslant 0$ $S_2 = \left]-\infty\,;0\right]$	$(3) \Leftrightarrow x \leqslant 0$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} > 0$ $S_3 = \left]-\infty\,;0\right]$

4°) $e^{-x} + 1 = 0 \quad (4)$	5°) $e^{3x+1} - e^{-x} < 0 \quad (5)$
$(4) \Leftrightarrow e^{-x} = -1$ (impossible) $S_4 = \varnothing$	$(5) \Leftrightarrow e^{3x+1} < e^{-x}$ $\Leftrightarrow 3x + 1 < -x$ $\Leftrightarrow 4x < -1$ $\Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{4}$ $S_5 = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{4}\right[$

$\left(e^{\frac{1}{x} - 1}\right)^{3} = e^{2} \times e^{2x} \quad (6)$

0 est valeur interdite.
On résout cette équation dans $\mathbb{R}^{*}$.

$(6) \Leftrightarrow e^{3\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = e^{2+2x}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{x} - 3} = e^{2+2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{x} - 3 = 2 + 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{x} - 5 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x^{2} + 5x - 3 = 0$

On considère le polynôme $2x^{2} + 5x - 3$.

On calcule son discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$.

On a $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-5-7}{4} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{1}{2}$.

$S_6 = \left\{-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$

V.

$f(x)=(x^2-2x)\mathrm{e}^x$ $\quad f'(x)=(2x-2)\mathrm{e}^x+(x^2-2x)\mathrm{e}^x=(x^2-2)\mathrm{e}^x$ (dérivée d'un produit)

$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ $\quad g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1-\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}=\dfrac{2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$

(dérivée d'un quotient)

VI. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{-x}-2x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}=0$

Solution détaillée :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{-x}-2x)=-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}=0$.

VII. Les solutions de l'équation différentielle $y'=-\dfrac{y}{2}$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

VIII. $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+4$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x-1)$

Or $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^x>0$

Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2\mathrm{e}^x-1$.

IX. Démontrons que $\forall x<0\quad \mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x<3$.

Soit x un réel strictement négatif.

On a $x<0$ donc $2x<0$ d'où $\mathrm{e}^{2x}<\mathrm{e}^0$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) donc $\mathrm{e}^{2x}<1\quad(1)$.

De même, $\mathrm{e}^x<1$ d'où $2\mathrm{e}^x<2\quad(2)$.

En ajoutant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient $\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x<3$.

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}_-^*\quad \mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x<3$

J'aurais dû mettre :

Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{3x}+2\mathrm{e}^x>0$ et que $\forall x<0\quad \mathrm{e}^{3x}+2\mathrm{e}^x<3$ afin que les élèves ne posent pas de changement de variable $X=\mathrm{e}^x$ comme je l'ai vu.

Bonus

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\sqrt{\mathrm{e}^n}$ est-elle géométrique ?

1ère méthode :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\sqrt{\mathrm{e}^{n+1}}=\sqrt{\mathrm{e}^n}\times\sqrt{\mathrm{e}}=u_n\sqrt{\mathrm{e}}$

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{\mathrm{e}}$.

2e méthode :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^n$ soit encore $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^n$

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{\mathrm{e}}$.