Exercices sur la géométrie plane

Le dimanche 20 mars 2022 au lundi 21 mars 2022

Règle de dédoublement des termes valable pour une parabole

Le 6-8-2022

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
On note I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.

1°) Démontrer que l'on a $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.
2°) On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires non nuls de même sens.
Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaires à ces deux vecteurs et de même sens puis que $IJ=\dfrac{AB+DC}{2}$.

On peut écrire une égalité de mesures algébriques (mesures algébriques par rapport à un vecteur non nul colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ ou à $\overrightarrow{CD}$).

Écrit le 17 août 2022

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
On note I et J les milieux points définis par $\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=\lambda\overrightarrow{BC}$ où λ est un réel fixé.

Figure

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que $\vec{u}=(2\lambda-1)\vec{v}+2\overrightarrow{IJ}$.
En déduire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.
Pour quelle valeur de λ les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont-ils colinéaires ?

Le 12-5-2022

Test 1ère spé 21-4-2022 lycée Franco-allemand de Buc

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère
un cercle Γ de centre Ω(a,b) et de rayon r. ;
un cercle Γ' de centre W'(a',b') et de rayon r'.
Γ a pour équation $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ et $x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0$.
On appelle A un des deux points d'intersection de ces deux cercles.
On dit que les cercles sont orthogonaux si et seulement si les tangentes en leurs points communs à chacun des cercles sont perpendiculaires.
1°) Démontrer que ces deux cercles sont orthogonaux si et seulement si $r^2+r'^2=\Omega\Omega'^2$.
2°) Traduire cette condition à l'aide des coefficients *a*, *b*, c, a', b', c'.
3°) Si on suppose que le cercle Γ est le cercle de centre O et de centre 1, donner une équation des cercles qui lui sont orthogonaux dépendant de a' et b'.
4°) En donner un exemple pour vérifier.

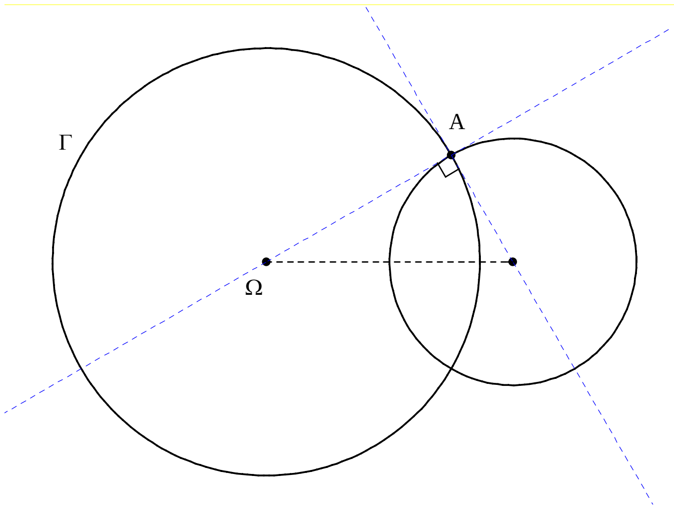


Figure Ω créé en 0 0
A coordonnées polaires (4,30°)
Ω' coordonnées cartésiennes (4/cos(pi/6))
Γ centre Ω et passe par A
Γ' centre W' passe par A

Regarder les vidéos disponibles sur internet.
On trouve des vidéos en anglais.
Une généralisation possible avec la notion de courbes orthogonales.
On parle aussi d'angle de deux cercles, de deux courbes.

Le 27-11-2021

Distance de deux droites parallèles dans le plan et dans l'espace
Distance de deux plans parallèles dans l'espace

$D:\ y=mx+p$
$D':\ y=mx+p'$

$$d(D,D')=\frac{|p-p'|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Le 27-5-2021

Antilles-Guyane 2013
Lelivrescolaire p.189

À tout réel *m*, on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation $y=x+1+me^{-x}$.
$\mathcal{C}_{-m}$ est l'image de $\mathcal{C}_m$ dans la symétrie *s* par rapport à la droite *D* d'équation $y=x+1$ et de direction $\vec{j}$.

$D:\ y=x+1$
On note *s* la symétrie oblique par rapport à *D* parallèlement à la direction de $\vec{j}$.

On cherche l'expression analytique de s.

$x' = x$

$\dfrac{y'+y}{2} = \dfrac{x'+x}{2} + 1$

$\dfrac{y'+y}{2} = x + 1$

$y' = 2x - y + 2$

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x - y + 2 \end{cases}$

Généralisation pour une symétrie oblique d'axe D d'équation $y = mx + p$ parallèlement à la direction de $\vec{j}$.

Le 27-2-2021

Équation d'une tangente à un cercle (plus généralement à une conique)

Équation d'un plan tangente à une sphère (plus généralement à une quadrique

- Utilisation des dérivées partielles
- Règle de dédoublement des termes

Le 29 décembre 2020

Exercices écrits pour le lycée (je ne sais plus). J'avais travaillé sur Geogebra.
Je les mets ici car ils peuvent être intéressants.

$\left(|\,x+y\,|-1\right)^2 + \left(|\,x+y\,|+1\right)^2 = 5$ inscrit dans $[-4\,;4]^2$

$(x+y-1)^2 + (x+y+1)^2 = 3$

ou n'importe quoi

2 droites

$(x+y-1)^2 + (x-y+1)^2 = 5$ ou m et discussion
cercle

Le 7 février 2021

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse t. On pose $\varphi(t) = \mathrm{OM}^2$.

1°) Démontrer que φ est dérivable sur I et que $\varphi'(t) = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}$.

2°) En déduire que si OM est maximale ou minimale localement pour un réel t0 appartenant à l'intérieur de I, alors la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t0 en est orthogonale à (OM).

DM 15-1-2020

Saint Jean-de-Passy nièce de Virginie Gaillard en 1ère spé

Exercice 1 :
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.
L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{3}{2}$ unité d'aire.
Deux de ses sommets sont A(2, – 3) et B(3, – 2).
Le centre de gravité G se trouve sur la droite D d'équation $y = 3x - 8$.
Calculer les coordonnées de C.

Exercice 2 :

Déterminer les sommets A et C du triangle ABC dont on donne B(2, – 7) ainsi qu'une équation de la hauteur h issue de C et de la médiane m issue de A.
$h :\ 3x + y = -11 \quad m :\ x + 2y = -7$

Le 27-9-2020

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $y = \dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^x + 1}$.
Par quelle transformation peut-on obtenir $\mathcal{C}_2$ à partir de $\mathcal{C}_1$?

Le 10 avril 2020

L'exercice que j'ai écrit a été posé au bac C Limoges juin 1976.
Je m'en suis rendu compte après coup.

On se place dans le plan P.
On note $P^+ = \left\{\mathrm{M}(x\,;y) \,/\, x > 0 \text{ et } y > 0\right\}$.
$f : \mathrm{M}(x\,;y) \mapsto \mathrm{M}'\left(x' = \mathrm{e}^x\,;\, y' = \mathrm{e}^y\right)$

f n'est pas une application affine.
non conservation de l'alignement et du milieu

1°) Démontrer que f établit une bijection de P dans P^+. Préciser la bijection réciproque.
2°) image de par f de $(\mathrm{O}x)$, $(\mathrm{O}y)$

- $x + y = a \quad (a \in \mathbb{R})$
- $x - y = a \quad (a \in \mathbb{R})$
- $y = \mathrm{e}^x$
- cercle Γ de centre O et de rayon R avec équations paramétriques

droite Δ : $y = x$ stable par f

Écrit à part : $y = \mathrm{e}^x$

Le 11 avril 2020

aspect paramétrique $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{\cos t} \\ y = \mathrm{e}^{\sin t} \end{cases}$

Le 21-3-2020

Exercices & Problèmes Maths 2^{e} année MP
De Bernard Beck, Isabelle Selon, Christine Feuillet

1 Pour s'entraîner

1 a) Déterminer la fonction φ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $y = e^x$ si, et seulement si : $p = \varphi(m)$.

b) Déterminer la fonction ψ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à la courbe $\mathcal{L}$ d'équation $y = \ln(x)$ si, et seulement si : $p = \psi(m)$.

c) Déterminer le nombre de tangentes communes aux courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$.

Que peut-on dire de leurs pentes ? Ce résultat était-il prévisible ?

2 On considère quatre droites D_1, D_2, Δ_1 et Δ_2 telles que :

$$D_1 \cap D_2 = \{I\}\ ; \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{J\}\ ; \quad I \neq J.$$

Pour simplifier les calculs, on convient de noter,

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour qu'il existe au moins un vecteur v tel que :

$$a \wedge v = c\ ; \qquad b \wedge v = d.$$

Montrer qu'alors v est unique.

6 Soit $ABCDE$ un polygone régulier convexe du plan euclidien.

a) Calculer le rapport des longueurs AI et AJ où I et J sont respectivement les intersections du segment $[A, C]$ avec les segments $[B, D]$ et $[B, E]$.

b) Donner une équation du second degré, à coefficients entiers, ayant ce nombre pour racine.

Conseils

1) Écrire l'équation de la tangente en un point.
c) Comment sont les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$?
3) Penser aux cercles équidistants de deux droites

que :

$$D_1 \cap D_2 = \{I\}\ ; \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{J\}\ ; \quad I \neq J.$$

Pour simplifier les calculs, on convient de noter,
$D_1(x, y)$ ou D_1, l'équation de la droite D_1.

Ainsi : $D_1 = a_1x + b_1y + c_1$.

De même pour les autres droites.

a) Montrer que toute droite passant par I admet une équation de la forme $\alpha D_1 + \beta D_2$, avec $(\alpha, \beta) \neq 0$.

Étudier la réciproque.

b) En déduire une expression simple d'une équation de la droite (IJ).

3 Déterminer les sphères de l'espace tangentes aux plans :

$\mathcal{P}$: $x + y - z = 1$; $\quad \mathcal{Q}$: $-2x + y + 3z = 6$;
$\mathcal{R}$: $2x - 3y - z = 5$;

4 a) Dans le plan, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et cinq points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 et M situés sur $\mathcal{C}$.

Montrer que le produit des distances de M aux droites (M_1M_2) et (M_3M_4) est égal au produit des distances de

1) Écrire l'équation de la tangente en un point.
c) Comment sont les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$?
3) Penser aux cercles équidistants de deux droites dans le plan...
4) a) Utiliser le cercle trigonométrique.
5) Calculer de deux manières différentes (a, b, v) pour mettre en évidence une condition...
Pour la réciproque, résoudre d'abord l'équation $a \wedge v = c$...
6) a) Faire une figure. Traquer les valeurs des angles, les triangles isocèles..
Puis utiliser la formule du cours

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

2 Point de Gergonne d'un triangle

Soit ABC un triangle, et A', B', C' trois points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, distincts des sommets du triangle. Soit $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ six réels tels que A' est le barycentre de $(B, \alpha), (C, \alpha')$, B' le barycentre de $(C, \beta), (A, \beta')$, C' le barycentre de $(C, \gamma), (A, \gamma')$.

Le 23-7-2018

Issu du cours de Pascal Delahaye sur les fonctions
« équation d'une courbe »
Équation d'une courbe
Équation cartésienne d'une courbe

Définition 3 : Equation cartésienne d'une courbe
On considère le plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ une courbe du plan et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
On dira que "$f(x, y) = 0$" est une *équation cartésienne* de la courbe $\mathcal{C}$ lorsque :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff f(x, y) = 0$$

Une équation cartésienne se détermine donc par équivalences successives...

Exemple 2. La représentation graphique d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admet pour équation cartésienne : $y = f(x)$

Soit f une fonction de deux variables x et y.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) tels que f(x,y)=0.
Dans la plupart des cas, on obtient un ensemble non vide, une « courbe ».
On dit que l'égalité « f(x,y)=0 » est une équation de $\mathcal{C}$.

Exemples : (deux exemples fondamentaux du lycée)
1 Une droite du plan admet toujours une équation cartésienne de la forme ax+by+c=0 avec a et b non tous les deux nuls. La fonction f est ici définie par $f(x, y) = ax + by + c$.
2. Un cercle du plan dans un repère orthonormé admet toujours une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
La fonction f est ici définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ x^2+ … .

Il y a d'autres types de courbes ellipses, paraboles, hyperboles etc.

Le terme d'équation est ici malheureux. Il ne s'agit pas d'une équation au sens ordinaire. On ne cherche pas à la résoudre.
Il s'agit d'une relation qui caractérise l'appartenance d'un point à une courbe à l'aide des coordonnées.
Dans certains cas, il est possible d'exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x.
Lorsque l'on peut exprimer y en fonction de x, on a alors $y = g(x)$. La courbe est la représentation graphique de la fonction g.

Exemple de tracé sur Geogebra :
$x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (folium de Descartes)

courbe en forme de cœur « équation d'un cœur »

intersection avec l'axe des abscisses : $f(x, 0) = 0$
intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0, y) = 0$

Idem dans l'espace : équation d'une surface

Quelques propriétés :

On suppose que f possède la propriété de symétrie suivante : $f(x, y) = f(y, x)$.

Dans ce cas, dans un repère normal du plan, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = x$ pour axe de symétrie (cf. expression analytique de la symétrie par rapport à cette droite).

Dans un repère normal, la courbe d'équation $f\left(y,x\right)=0$ est la symétrique de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Image par une translation :
La courbe d'équation $f\left(x-a,y-b\right)=0$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$.
Image par une homothétie de centre O :
$f\left(kx,ky\right)=0$

$\mathcal{C}$: $f\left(x,y\right)=0$
$\mathcal{C}$ ' : $f\left(y,x\right)=0$

Dans un repère quelconque $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, $\mathcal{C}$ ' est l'image de $\mathcal{C}$ par la symétrie oblique par rapport à la droite *D* d'équation $y=x$ de direction $\vec{i}-\vec{j}$ (ou affinité de rapport – 1 par rapport à *D* et de direction $\vec{i}-\vec{j}$).

Le 29-6-2020

courbe d'équation $\left|y\right|=f\left(x\right)$

Le 7-9-2020

Soit *f* une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

On note *g* l'application définie $g\left(x\right)=f\left(kx\right)$ où *k* est un réel non nul.

Par quelle transformation simple du plan la courbe représentative de *g* se déduit-elle de celle de *f* ?

Il s'agit de l'affinité d'axe (O*y*), de direction (O*x*) et de rapport $\dfrac{1}{k}$ (on pourrait donner son expression analytique).

On retrouve le cas particulier où $k=-1$.
L'affinité d'axe (O*y*), de direction (O*x*) et de rapport – 1 est la symétrie oblique par rapport à l'axe (O*y*) et de direction (O*x*).

Exemple : $y=\cos x$ $\qquad$ $y=\cos 2x$

Exercice :

Pour tout réel *k* non nul, on note $\mathcal{C}_k$ la courbe d'équation $y=\text{e}^{kx}$.

Par quelle transformation simple du plan $\mathcal{C}_k$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

On se place dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Soit *a* un réel fixé.
On note *D* la droite d'équation $y=a$.
Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe *D*.

Soit *f* une fonction.
$g\left(x\right)=2a-f\left(x\right)$

$\mathcal{C}_g$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite *D*.

Cas particulier : $a=0$

Exemple :
$\mathcal{C}$: $y=\dfrac{1}{1+\text{e}^x}$
$\mathcal{C}$ ' : $y=\dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+1}$

Justifier que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont symétriques par rapport à une droite dont on précisera une équation.

Le 17-8-2021 (voir cours de Fabien Pucci)
Soit *f* une fonction.
$g\left(x\right)=f\left(a-x\right)$
On se place dans un repère orthogonal.
$\mathcal{C}_g$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite *D* d'équation $y=\dfrac{a}{2}$.

Cas particulier : $a=0$

Le dimanche 5 mai 2012

Ca : $x^3+y^3+axy=0$
MPSI image par une homothétie de centre O et de rapport *k*
En 1ère S1, faire varier *a* et observer sur Geogebra
Comment peut-on obtenir $\mathcal{C}_a$ à partir de $\mathcal{C}_1$?

Le dimanche 15-11-2015

Exercice livre 1ère S livre Barbazo page 224 N°67 sur les équations de droites de la forme $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Soit *a* et *b* deux réels non nuls.

Démontrer que la droite passant par les points $\text{A}\left(a,0\right)$ et $\text{B}\left(0,b\right)$ a pour équation $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

2°)

Exercices sur la géométrie plane

1 Soit ABC un triangle équilatéral et M un point quelconque intérieur au triangle. On note H, K, L les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB), (BC), (CA).
Démontrer que la somme $MH + MK + ML$ est constante.
Il s'agit du théorème de Viviani (voir article de Wikipedia).
Il existe des preuves sans mot
http://www.rozenblum.com/un-point-dans-un-triangle-equilateral/
Même approche (profs without words) :

2 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
À tout réel *m*, on fait correspondre les droites D_m et D_m' d'équations cartésiennes respectives
$(m+1)x - 2my + 5m - 3 = 0$ et $(m-1)x + (3m+1)y - 2m + 1 = 0$.
1°) a) Démontrer que toutes les droites D_m passent par un point fixe.
b) Démontrer que toutes les droites D_m' passent par un point fixe.
2°) Déterminer l'écart angulaire des droites D_m et D_m'.
3°) Pour tout réel *m*, on note K_m le point d'intersection des droites D_m et D_m'.
Déterminer l'ensemble des points K_m.

Rappel : définition de l'écart angulaire de deux droites *D* et *D'* du plan.

$\alpha = \text{Arccos}\dfrac{\left|\left(\vec{u} \mid \vec{u}'\right)\right|}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}'\|}$ où $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont des vecteurs directeurs respectifs de *D* et *D'*.
On démontre que cette définition est indépendante des vecteurs directeurs choisis pour chacune des deux droites.

3 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z} + \bar{z}z^2 - z - z\bar{z}^2 = 0$.
2°) En déduire l'ensemble *E* de tous les points du plan complexe dont les affixes sont solutions des équations $z^2 - 2\lambda z + 1 = 0$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

4 Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, on pose $Z = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.
On note *P* le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
1°) Déterminer l'ensemble *A* des points M de *P* dont l'affixe *z* est telle que $Z \in \mathbb{R}$.
2°) Déterminer l'ensemble *B* des points M de *P* dont l'affixe *z* est telle que $Z \in i\mathbb{R}$.

5 **Théorème de Napoléon**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère un triangle équilatéral direct ABC sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA′, ACB′ et ABC′.
On note P, Q et R les centres de gravité respectifs de BCA′, ACB′ et ABC′.
Pour la figure, il est inutile de faire figurer le repère.
1°) On note *a*, *b*, *c*, *a*′, *b*′, *c*′, *p*, *q*, *r* les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q, R.
a) Traduire, avec les affixes des points concernés, que C′ est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
b) Démontrer que l'on a : $a' + b' + c' = a + b + c$.
2°) En déduire que l'on a : $p + q + r = a + b + c$.
3°) Démontrer à l'aide des relations établies précédemment que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont le même centre de gravité.
4°) Démontrer que l'on a : $3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b)$ et $3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b)$.
5°) Démontrer que l'on a : $a - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b' - c)$; $b - a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a')$; $c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b)$.
6°) Déduire des questions précédentes que le triangle PQR est équilatéral.

6 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 1.
À tout point M de *P*, d'affixe *z*, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan *P* tels que les points A, M, M' soient alignés.

7 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
À tout réel *m*, on fait correspondre la droite D_m d'équation cartésienne $(1 - m^2)x + 2my - 4m + 2 = 0$.
Démontrer qu'il existe un point A dont la distance à ces droites soit constante.
En déduire que toutes les droites D_m sont tangentes à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

8 Dans le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points A(4, 3) et B(0, 2).
Déterminer un équation cartésienne de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AOB}$.

9 Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$.
1°) Déterminer le domaine de définition de θ.
2°) Déterminer la nature et tracer $\mathcal{C}$.
3°) Mêmes questions avec la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation polaire $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$.

10 **Notations**
On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On rappelle que : $1 + j + j^2 = 0$.
On notera aussi que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.

Dans le plan orienté, on considère trois triangles équilatéraux de sens direct OAA′, OBB′ et OCC′.
Le but de l'exercice est de démontrer que les milieux U, V et W respectifs des segments [A′B], [B′C] et [C′A] sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Pour cela, on muni le plan d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On note *a*, *b*, *c* les affixes respectives des points A, B, C et *a*′, *b*′, *c*′ les affixes respectives des points A′, B′ et C′.
1°) Exprimer *a*′ en fonction de *a*, *b*′ en fonction de *b*, *c*′ en fonction de *c*. On utilisera le nombre j dont on a rappelé la définition.
2°) En déduire l'affixe *u* de U en fonction de *a* et *b*, l'affixe *v* de V en fonction de *b* et *c*, l'affixe *w* de W en fonction de *a* et *c*.
3°) Conclure.

11 Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $3x+4y+12=0$ et le vecteur $\vec{u}\,(2\,;3)$. Pour tout point $M(x\,;y)$ du plan, on note $M'(x'\,;y')$ le projeté de M sur D dans la direction de la droite $\mathbb{R}\vec{u}$.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

12 Soit A et B deux points fixés du plan euclidien *P*.
Déterminer les lignes de niveau de l'application $f : P \to \mathbb{R}$ sans utiliser un repère.
$$M \mapsto \frac{MA}{MB}$$

13 Soit A et B deux points fixés du plan euclidien *P*.
Déterminer les lignes de niveau de l'application $f : P \to \mathbb{R}$.
$$M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-6x+2y+2=0$.
Démontrer que O est situé à l'extérieur de $\mathcal{C}$; déterminer une équation des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O.

15 Soit D et D' deux droites sécantes du plan. Ces deux droites partagent le plan en quatre quadrants. Soit A et B deux points situés dans un même quadrant n'appartenant ni à D ni à D'.
Déterminer un point M de D et un point M' de D' tel que la longueur du trajet « AM M'B » (c'est-à-dire la somme $AM+MM'+M'B$) soit minimale.
Indication : introduire $A'=S_D(A)$ et $B'=S_{D'}(B)$.

16 **Le problème du pont**
Soit D et D' deux droites strictement parallèles du plan.
Soit A un point appartenant au demi-plan ouvert de frontière D et ne contenant pas D' et B un point appartenant au demi-plan de frontière D' ne contenant pas D.
Soit P et Q deux points respectivement sur D et sur D' tels que $(PQ) \perp D$.
Indication : Introduire $A'=t_{\overrightarrow{PQ}}(A)$ et comparer les trajets « BQPA » et « BQA'A ».

17 **Partie 1 Théorème de Johnson**
On considère cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ trois cercles de même rayon et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 qui passent tous par un même point M.
Soit A le deuxième point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, B le deuxième point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, C le deuxième point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$.
Le but de l'exercice est de démontrer que les points A, B, C sont sur un même cercle qui a le même rayon que les trois cercles de départ.
1°) Que représente M pour le triangle $O_1\,O_2\,O_3$?
2°) Démontrer que les segments $[BO_1]$, $[CO_2]$, $[AO_3]$ ont le même milieu (on cherchera des losanges sur la figure).
3°) Conclure en considérant une symétrie centrale.
Partie 2
On considère maintenant quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ de centres respectifs O_1, O_2, O_3, O_4, ayant tous le même rayon R et passant tous par un même point M. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se recoupent en B_1, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en B_2, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ en B_3, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ en B_4. Démontrer que $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme. (On pourra utiliser le résultat de la partie 1).

18 Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une droite D de repère $\left(A, \vec{u}\right)$.
Soit M un point quelconque du plan.
Démontrer que $d(M, D)=\dfrac{\left|\det_B\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)\right|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ où B est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.
Indication : Calculer $\det_B\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ en introduisant le point H, projeté orthogonal de M sur D.

19 Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout nombre complexe z, on note M, M' et M" les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3.
1°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de *P* tels que O soit le centre du cercle circonscrit au triangle M M'M".
2°) Déterminer z tel que O soit le centre de gravité du triangle M M'M".

20 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit a et b deux réels non nuls.
On note M le point de coordonnées (a, b), A le point de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de coordonnées $(0, b)$.
1°) Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
2°) Calculer les coordonnées du point K, projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

22 **Rappel de définition**

Soit D une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul qui n'a pas la même direction que D.
On appelle **symétrie oblique** par rapport à D parallèlement à $\mathbb{R}\vec{u}$ l'application du plan *P* dans lui-même qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' vérifiant les deux conditions suivantes :
- le milieu I de $[MM']$ appartient à la droite D.
- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Le 23 octobre 2023

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide, centré en 0.

Soit f une fonction définie sur D. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que si pour tout $x \in D$ on a $f(-x)=ax+f(x)$, alors $\mathcal{C}$ est globalement invariante par la symétrie oblique s par rapport à (Oy) dont la direction est donnée par le vecteur $\vec{u}(-2, a)$.

On peut adapter $f(b-x)=ax+f(x)$.

Ancienne version :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide, centré en 0.
Soit f une fonction paire définie sur D.
On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=ax+f(x)$ où a est un réel dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ est globalement invariante par la symétrie oblique s par rapport à (Oy) parallèlement à la droite d'équation $y=ax$.

Application :

Dans chacun des cas suivants démontrer que $\mathcal{C}$ est globalement invariante par une symétrie oblique que l'on précisera.

① $f : x \mapsto x + \ln|x|$ ② $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^2}$ ③ $f : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$ ④ $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$

④ $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$

Démontrer que pour tout réel x on a $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(1+\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$.

En déduire que $\mathcal{C}$ est globalement invariante par la symétrie oblique s d'axe (Oy) parallèlement à la droite D d'équation $x-2y=0$.

Il peut être intéressant de signaler que les tangentes en deux points d'abscisses opposées sont sécantes en un point de l'axe des ordonnées.

Le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Pour tout point $\mathrm{M}(x, y)$ du plan, on note $\mathrm{M}'(x', y')$ l'image de M par la symétrie oblique s par rapport à $(\mathrm{O}y)$ parallèlement à $\mathbb{R}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$.

Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x + \ln|x|$. On note $\mathcal{C}_1$ la partie de la courbe pour $x > 0$ et $\mathcal{C}_2$ la partie de la courbe pour $x < 0$.

Démontrer que $s\left(\mathcal{C}_1\right) = \mathcal{C}_2$.

Le mardi 23-7-2019

Démontrer que $\mathcal{C}$ est globalement invariante par s.

Même question avec la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x + \mathrm{e}^{-|x|}$.

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide, centré en 0.

Soit f une fonction paire définie sur D.

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x + f(x)$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ est globalement invariante par s.

On peut prendre la courbe $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ ou la courbe $y = x - \sqrt{x^2+1}$.

Le dimanche 29-12-2019 (et complété le 9 février 2021)

Expression analytique de la symétrie oblique par rapport à l'axe des ordonnées et de direction $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ (ou la droite δ d'équation $y = ax$)

$\mathrm{M}\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$ $\quad$ $\mathrm{M}'\left|\begin{array}{l} x' = -x \\ y' \end{array}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\left|\begin{array}{l} x' = -2x \\ y' \end{array}\right.$

On traduit la colinéarité de $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ avec $\vec{u}$.

$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ On peut aussi utiliser le critère de colinéarité avec le déterminant.

$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

$\lambda = -2x$

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y - 2ax \end{cases}$

$y = f(x)$

$y' + 2ax = f(-x')$

$y' = 2ax' + f(-x')$

Le jeudi 21 novembre 2019

J'avais noté dans la nuit (3 h 36)

$f(x) = ax + \varphi(x)$

Voir affinité ou symétrie / Δ

Le mardi 9 février 2021

$f : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$

Le 9 février 2021

Expression analytique de l'affinité d'axe (Oy), de direction D d'équation $y = ax$ et de rapport k

$\lambda = (k-1)x$

$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y + (k-1)ax \end{cases}$

Le dimanche 15 octobre 2023

$f : x \mapsto \ln\left|\,\mathrm{e}^x - 1\,\right|$

invariante par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et direction donnée par le vecteur $\vec{u}$ (2,1).

$\boxed{23}$ Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$ pour tout nombre complexe z non nul.

Soit f l'application qui à tout point M de *P*, distinct de O, d'affixe *z*, fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z + \frac{1}{z}$.

1°) Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer que $f(z_1) = f(z_2)$ si et seulement si $z_1 = z_2$ ou $z_1 z_2 = 1$.

2°) Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

Indication : Utiliser le 1°) en remarquant que $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

$\boxed{24}$ 1°) Pour tout nombre complexe $z \neq -\mathrm{i}$, on pose $Z = \frac{z^2}{z + \mathrm{i}}$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan complexe d'affixe $z \neq -\mathrm{i}$ tels que Z soit imaginaire pur.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\mathrm{i}az - 2a = 0$ (E) où a est un réel.

Démontrer que les images des solutions de (E) appartiennent à $\mathcal{E}$.

Mieux : déterminer l'ensemble des points images des solutions de (E).

$\boxed{25}$ Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux droites *D* et D' d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ des vecteurs directeurs respectifs de *D* et D'. On note α une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{u'})$.

Démontrer que, si *D* et D' ne sont pas orthogonales, on a : $\tan\alpha = \frac{m' - m}{1 + mm'}$.

Application : Déterminer une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle aigu formé par les droites *D* et D' d'équations réduites respectives $y = x - 1$ et $y = -2x + 3$.

$\boxed{26}$ Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0$.

1°) On pose $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$.

Vérifier que $\mathcal{R}' = (\mathrm{O}, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère du plan.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$; déterminer $\mathcal{C}$.

2°) Déterminer l'ensemble des couples (m, n) d'entiers relatifs solutions de l'équation diophantienne $m^3 + 3mn + n^3 = 1$.

$\boxed{27}$ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 2$.

On pose $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

Vérifier que $\mathcal{R}' = (\mathrm{O}, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormé du plan.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$; déterminer $\mathcal{C}$.

$\boxed{28}$ Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les courbe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations polaires respectives $\rho = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}$ et $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$.

1°) Déterminer le domaine de définition de θ.
2°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et tracer $\mathcal{C}$.
3°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}'$ et tracer $\mathcal{C}'$.

$\boxed{29}$ Dans un triangle ABC, on note I le milieu de [BC]. Une droite variable Δ passant par I, distincte de (BC), non parallèle à (AB) et à (AC), coupe (AB) et (AC) respectivement en D et E. Quel est le lieu du point d'intersection J des droites (BE) et (CD) ?

Indication : On pourra considérer le repère $(\mathrm{I}, \overrightarrow{\mathrm{IC}}, \overrightarrow{\mathrm{IA}})$.

$\boxed{30}$ Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles extérieurs de rayons respectifs *R* et R' et de centres respectifs Ω et Ω'. Deux points M et M' décrivent respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de telle sorte que la tangente à $\mathcal{C}$ en M et la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' soient orthogonales.

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu du point I, milieu de $[\mathrm{MM}']$.

On oriente le plan et on se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le milieu de $[\Omega\Omega']$ et $\vec{i} = \frac{1}{\Omega\Omega'}\overrightarrow{\Omega'\Omega}$.

On note a et $-a$ les abscisses de Ω et Ω' dans ce repère ($a > 0$).

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$; on pose $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}) = \theta \; (2\pi)$.

Soit $\mathrm{M_1}'$ et $\mathrm{M_2}'$ les points de $\mathcal{C}'$ tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega'\mathrm{M_1}'}) = \theta + \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega'\mathrm{M_2}'}) = \theta - \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$.

Démontrer que ce sont les deux points de $\mathcal{C}'$ en lesquels la tangente est orthogonale à la tangente en M à $\mathcal{C}$.

Calculer les coordonnées cartésiennes des points $\mathrm{I_1}$ et $\mathrm{I_2}$ milieux respectifs des segments $[\mathrm{MM_1}']$ et $[\mathrm{MM_2}']$.

En déduire la réponse à la question posée.

$\boxed{36}$ Le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Donner une équation polaire d'une droite strictement parallèle à l'axe des abscisses et d'une droite strictement parallèle à l'axe des ordonnées.
2°) Que peut-on dire de deux points M et M' admettant pour systèmes de coordonnées polaires (ρ, θ) et $(-\rho\,;\theta + \pi)$?

37 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit $\mathcal{D}$ une droite de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$.

Pour tout point M du plan, on note M' son symétrique par rapport à $\mathcal{D}$.

Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{\mathrm{AM}'} = 2\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}\vec{u} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

2°) Dans cette question, $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $3x - 4y + 2 = 0$.

Calculer les coordonnées $\left(x', y'\right)$ de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

38 Soit ABC un triangle quelconque.
Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan qui ont les mêmes coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ et dans le repère $\left(\mathrm{B}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$.

39 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et ABCD un quadrilatère inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ tel que ABCD ne soit pas un trapèze.

La perpendiculaire à (CD) passant par le milieu P de [AB] coupe (CD) en P_1.

La perpendiculaire à (AB) passant par le milieu Q de [CD] coupe (AB) en Q_1.

La perpendiculaire à (AD) passant par le milieu R de [BC] coupe (AD) en R_1.

La perpendiculaire à (BC) passant par le milieu S de [AD] coupe (BC) en S_1.

1°) Démontrer que les droites $\left(\mathrm{PP}_1\right)$ et $\left(\mathrm{QQ}_1\right)$ sont sécantes.

Soit I leur point d'intersection.

2°) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$.

3°) Démontrer que les droites $\left(\mathrm{PP}_1\right)$, $\left(\mathrm{QQ}_1\right)$, $\left(\mathrm{RR}_1\right)$ et $\left(\mathrm{SS}_1\right)$ sont concourantes en I.

40 Soit ABC un triangle du plan.

Démontrer que $\sin^2\widehat{\mathrm{A}} + \sin^2\widehat{\mathrm{B}} + \sin^2\widehat{\mathrm{C}} = 2$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle.

41 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À tout point $\mathrm{M}\left(a\,;b\right)$ de $\mathcal{P}$ on fait correspondre les points P et Q, projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Si M est distinct de O, on associe à M le point M', projeté orthogonal de O sur la droite (PQ). Dans le cas où $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, P et Q sont confondus avec O, on associe à M le point M' tel que $\mathrm{M}' = \mathrm{O}$.

Soit Φ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ainsi définie ; on notera $\mathrm{M}' = \Phi\left(\mathrm{M}\right)$.

1°) Déterminer les coordonnées de M' en fonction de celles de M.

2°) Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a : $\mathrm{OM}' \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{OM}$. Préciser dans quel cas il y a égalité.

3°) Soit $\left(\mathrm{M}_n\right)$ la suite de points ainsi définie : $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{P}$ et pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{M}_{n+1} = \Phi\left(\mathrm{M}_n\right)$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n$.

4°) Déterminer l'image par Φ :

- d'une droite passant par l'origine ;
- d'une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées.

42 **Théorème de Napoléon**

On considère un triangle ABC quelconque sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'.

On note P, Q et R les centres de gravité respectifs de BCA', ACB' et ABC'.

On pose $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$.

On note α, β, γ les mesures respectives en radians des angles $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{CBA}}$, $\widehat{\mathrm{ACB}}$.

1°) Justifier chacune des égalités suivantes : $\mathrm{AQ} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{AR} = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$; $\widehat{\mathrm{RAQ}} = \alpha + \dfrac{\pi}{3}$.

En déduire que l'on a $\mathrm{RQ}^2 = \dfrac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha\right)$.

2°) Exprimer cos α en fonction de a, b, c.

Démontrer que $\mathrm{RQ}^2 = \dfrac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \dfrac{2S}{\sqrt{3}}$ où S désigne l'aire du triangle ABC.

3°) Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

43 Soit M un point intérieur à un triangle ABC. La droite (MA) coupe (BC) en A' ; la droite (MB) coupe (AC) en B' ; la droite (MB) coupe (MC) en C'.

On pose $S = \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MA'}} + \dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MB'}} + \dfrac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MC'}}$ et on se propose de déterminer un point M pour lequel la somme S est minimale.

On rappelle que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on peut trouver des réels strictement positifs α, β, γ tels que M soit le barycentre de (A ; α), (B ; β), (C ; γ).

1°) En déduire qu'alors $\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MA'}} = \dfrac{\beta + \gamma}{\alpha}$.

2°) Démontrer que l'on a : $S = \left(\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\gamma}\right) + \left(\dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$.

3°) Démontrer que pour tout réel x strictement positif on a : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$; préciser le cas d'égalité.

4°) a) Déduire des questions précédentes que : « S est minimale » équivaut à « $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta} = 1$ ».

b) En déduire alors la position du point M pour que S soit minimale.

44 Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1°) Déterminer les points invariants par f.

2°) On note A et B les points d'affixes respectives 1 et − 1.

Soit M un point distinct des points O, A et B.

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et – 1, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b) En déduire une expression de $\dfrac{\mathrm{M'B}}{\mathrm{M'A}}$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}$ et de $\left(\overrightarrow{\mathrm{M'A}}\,; \overrightarrow{\mathrm{M'B}}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)$.

3°) Soit Δ la médiatrice du segment [AB].

Démontrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M′ est un point de Δ.

4°) Soit Γ le cercle de diamètre [AB].

a) Démontrer que si le point M appartient à Γ, alors le point M′ appartient au segment [AB].

b) Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

45 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$.
Pour tout point M du plan, on note M' son symétrique par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
Exprimer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

46 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations cartésiennes respectives $2x + y + 1 = 0$ et $x - y - 12 = 0$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1'$ image de $\mathcal{D}_1$ dans la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_2$.

47 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$.
1°) Déterminer le domaine de définition de θ.
2°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et tracer $\mathcal{C}$.

48 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = 3\cos\theta + 2\sin\theta$.
Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et tracer $\mathcal{C}$.

49 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Soit f l'application de P dans P qui à tout point $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ associe le point $\mathrm{M}'(x'\,;\,y')$ défini comme suit :
si H est le projeté orthogonal de M sur la droite D d'équation $x = 1$, alors M' est le point de (OH) ayant même abscisse que M.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2°) Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe d'équation $y = x^n \ln|x|$.
a) Démontrer que $f\left(\mathcal{C}_n\right) = \mathcal{C}_{n+1}$.
b) Démontrer que si deux points ont la même ordonnée sur $\mathcal{C}_n$ alors leurs images sont alignées avec O.
c) Démontrer que si M_0 est un point différent de O à tangente horizontale, alors son image M_0' par f et telle que $\left(\mathrm{OM}_0'\right)$ est tangente en M_0' à $\mathcal{C}_{n+1}$.

50 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $\mathrm{A}(1\,;\,2)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(3\,;\,-2)$ pour vecteur directeur.
Pour tout point M du plan, on note M' son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$.
Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

51 Soit OACB et OA′C′B′ deux parallélogrammes tels que $\mathrm{A} \in [\mathrm{OA}']$ et $\mathrm{B} \in [\mathrm{OB}']$.
Démontrer que les droites (AB′), (A′B) et (CC′) sont concourantes ou parallèles.
On prendra (O, A, B) comme repère affine.
On notera a l'abscisse de A′ et b l'ordonnée de B′.

52 Soit OACB un parallélogramme. Soit E, F, G, H des points appartenant respectivement aux segments [OB], [BC], [CA] et [AO] tels que l'on ait : (EG) / / (OA) et (FH) / / (OB).

Démontrer que les droites (EF), (GH) et (OC) sont concourantes ou parallèles.

On prendra (O, A, B) comme repère affine. On notera a l'abscisse de H et b l'ordonnée de E.

53 Dans le plan muni d'un repère, on considère les droites D_1, D_2, D_3 d'équations cartésiennes respectives $x + 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 4 = 0$, $ax + y - 5 = 0$ où a est un réel.
Déterminer a tel que D_1, D_2, D_3 soient concourantes.

54 Démontrer que dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ admet les bissectrices du repère pour axe de symétrie.

55 Démontrer que dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe d'équation $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ admet la seconde bissectrice du repère pour axe de symétrie.

56 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.
1°) Démontrer que $f\left(\mathcal{C}\right)$ est un cercle.
2°) Déterminer R tel que $\mathcal{C} \cap f\left(\mathcal{C}\right) = \varnothing$.

57 Soit I le point de coordonnées (1 ; 1).
On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre I, tangent en A à (Ox) et en B à (Oy).
1°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2°) Soit $\mathrm{M}\left(x_0, y_0\right)$ un point quelconque de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B, dont l'abscisse est différente de 1 et dont l'ordonnée est différente de 1.
La tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe (Ox) en P et (Oy) en Q.
Calculer les coordonnées de P et Q en fonction de x_0 et y_0.
3°) Démontrer que (BP), (AQ) et (OM) sont concourantes en un point N. Calculer les coordonnées de N.

59 On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$.
1°) Vérifier que le point $\mathrm{A}(-1\,;\,3)$ appartient à $\mathcal{C}$.
2°) Écrire une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A. Utiliser la règle de dédoublement des termes.

60 1°) Soit D une droite de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$.
Soit M un point quelconque du plan.
On note H le projeté orthogonal de M sur D.
Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \,|\, \vec{u}\right)}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\,\vec{u}$.
2°) Soit ABCD un rectangle. On pose $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AD} = b$.
On note H le projeté orthogonal de D sur (AC) et K le projeté orthogonal de B sur (AC).
Exprimer HK en fonction de a et b.

61 **Un théorème de Newton**
Soit O un point du plan et Γ un cercle de centre O. On construit un quadrilatère convexe EHFG circonscrit au cercle et on note A, B, Cet D les points de tangence.
On note I et J les milieux respectifs de [EF] et [GH].
On prend comme unité de mesure des longueurs le rayon du cercle Γ et on considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle alors *a*, *b*, *c* et *d* les affixes respectives des points A, B, C et D.
On appellera par ailleurs T_{A}, T_{B}, T_{C} et T_{D} les tangentes respectivement en A, B, C et D au cercle Γ.

1°) Soit M un point d'affixe *z*.
a) Démontrer que $\mathrm{M} \in T_{\mathrm{A}}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $z - a = kia$.
b) Démontrer que $\mathrm{M} \in T_{\mathrm{A}}$ si, et seulement si, $a^2\bar{z} + z = 2a$.
2°) On appelle E le point d'intersection de T_{A} et T_{B}.
En utilisant 1°) d), démontrer que l'affixe z_{E} est égale à $\dfrac{2ab}{a+b}$.
3°) On appelle F le point d'intersection de T_{C} et T_{D}.
Déterminer l'affixe de F, puis l'affixe z_{I}, du milieu I de [EF].
4°) On appelle maintenant H le point d'intersection de T_{B} et T_{C} et G le point d'intersection de T_{D} et T_{A}.
a) Déterminer l'affixe z_{J} du point J milieu de [GH].
b) Démontrer que $\left(a+d\right)\left(b+c\right)\left(a+b\right)\left(c+d\right)$ est réel. En déduire que $\dfrac{z_{\mathrm{I}}}{z_{\mathrm{J}}}$ est réel.
Que peut-on en déduire concernant la droite (IJ) ?

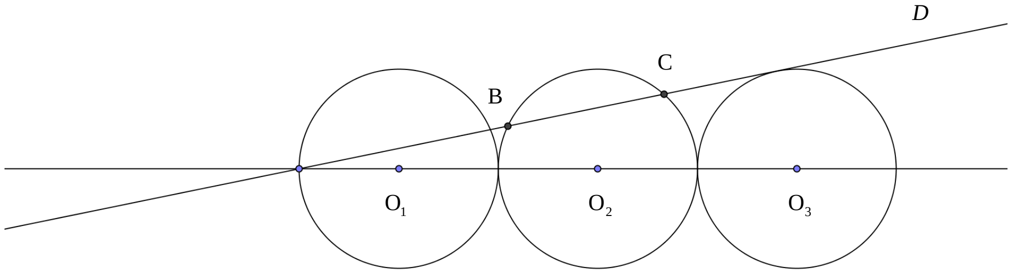
62 Soit D et D′ deux droites sécantes en O.
Soit A un point de D, distinct de O, et B un point de D′, distinct de O.
Soit M un point quelconque de la droite (AB).
Le point M se projette en P sur (OA) parallèlement à D′ et en Q sur (OB) parallèlement à D.
Démontrer que l'on a : $\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OA}}} + \dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = 1$.

63 Soit ABCD un parallélogramme.
Une droite Δ passant par C distincte de (BC) et de (CD) coupe (AB) en E et (AD) en F.
Démontrer que l'on a $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AE}}} + \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AF}}} = 1$.

64 Soit ABCD un carré de côté *a*. On note E le milieu de [AD].
Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle BCE.

65 **« Le théorème des dix milieux »**
On considère un repère orthonormé et 5 points A, B, C, D et E dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
On trace ensuite tous les segments dont les deux extrémités sont choisies parmi ces points.
Démontrer que le milieu d'un de ces segments est à coordonnées entières.

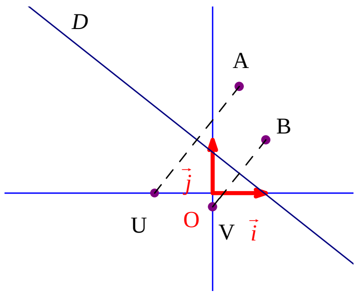
66 Sur la figure ci-dessous, on considère trois cercles ayant tous le même rayon $a > 0$ et tangents extérieurement.
La droite *D* est tangente au cercle de centre O_3.
La droite *D* coupe le cercle de centre O_2 en deux points B et C.
Exprimer la distance BC en fonction de *a*.



67 Soit M_1, M_2, …, M_{10} dix points du plan deux à deux distincts et situés dans un même carré de côté $a > 0$.
Démontrer qu'il existe un couple $\left(i,\, j\right) \in \left\{1, 2, ..., 10\right\}^2$ tel que $0 < \mathrm{M}_i\mathrm{M}_j < \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

68 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. À tout point M du plan de coordonnées $\left(x, y\right)$, on associe le point M' de coordonnées $\left(x', y'\right)$ avec $x' = \mathrm{e}^x$ et $y' = \mathrm{e}^y$.
Déterminer l'image d'une droite parallèle aux axes et d'un cercle de centre O.

69 Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Sur une feuille à part, placer les points $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$, $\mathrm{B}\left(1\,;1\right)$ et $\mathrm{H}\left(0\,;1\right)$.
Plier la feuille pour amener A sur l'axe des abscisses et B sur l'axe des ordonnées en des points nommés U et V.
Bien marquer le pli. Déplier la feuille. Tracer la droite *D*, trace de la pliure. Placer le milieu P de [AU] et le milieu R de [BV].
On note *u* l'abscisse de U et *v* l'ordonnée de V. Calculer la longueur VH.



70 Soit A, B, C, D quatre points du plan.
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}}\right) = 0$.

Le 4-1-2019

Théorème des dix milieux

Dans le plan muni d'un repère, on choisit cinq points à coordonnées entières. On a alors dix couples de points rouges ce qui définit dix milieux.
Expliquer pourquoi quels que soient les cinq points de départ, un milieu au moins a des coordonnées entières.

Munissons notre plan d'un repère suivant le quadrillage, de manière à ce que les lignes et colonnes tracées donnent des coordonnées entières aux points. (Autrement dit, le point en bas à gauche est l'origine (0,0), celui à sa droite est (1,0) et celui au dessus est (0,1)).
Quand on choisit un point, il appartient à l'une des quatre familles ci-dessous :

- les points d'abscisse et d'ordonnée paires
- les points d'abscisse paire et d'ordonnée impaire
- les points d'abscisse impaire et d'ordonnée paire
- les points d'abscisse et d'ordonnée impaires

Ici, on a choisi cinq points rouges. Alors, forcément deux au moins vont se retrouver dans la même famille (car il y a 5 points et 4 familles, donc pas assez de familles pour que chaque points soit séparé de tous les autres - c'est ce qu'on appelle le principe des tiroirs).
Alors pour ces deux points, comme leurs abscisses x_1 et x_2 sont de même parité, l'abscisse de leur milieu (la moyenne de x_1 et x_2) est un nombre entier. De même, l'ordonnée du milieu est un nombre entier. Et alors ce milieu est exactement sur le quadrillage !
Bien entendu, avec seulement 4 points, il est possible de s'arranger pour avoir tous les milieux hors du quadrillage : il suffit de prendre un point dans chaque famille !

Source :
Maths et malices n°13, ACL éditions, septembre-octobre 1993

Le 2-10-2023

Pour tout réel m on note $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation $y = x^2 - mx + m + 1$.
Démontrer que toutes les courbes passent par un point fixe A.
Soit m et m' deux réels tels que $m < m'$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_{m'}$.

Réponses

$\boxed{1}$ On utilise les aires.

$\boxed{2}$ 1°) a) A(3, 4) ; b) B$\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$; 2°) écart angulaire $= \frac{\pi}{4}$

$\boxed{3}$

$\boxed{4}$ $A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k$ avec $\Delta_k : y = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; B est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $(Ox) \cup \mathcal{C}$ (A ;1) avec A(1 ; 0)

$\begin{vmatrix} x^2 - y^2 & x-1 \\ 2xy & y \end{vmatrix} = 0 \qquad y = 0$

$\boxed{7}$ $\mathrm{A}(-1 ; 2)$ équidistant à D_m.
$\mathrm{d}(\mathrm{A} ; D_m) = 1$.
Tracer D_0, D_1, D_{-1}.

$\boxed{8}$ $\Delta : \ y = 2x$

$\boxed{9}$ $\mathcal{C} \left| \begin{array}{l} \Omega\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{2} \end{array} \right.$ \ {O ; A} avec O origine et A(1 ; 1)

$\boxed{10}$ 1°) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

R

$\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A'}$ donc $a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} a$

$\mathrm{B} \mapsto \mathrm{B'}$ donc $b' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} b$

$\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C'}$ donc $c' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} c$

2°) $u = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} a + b}{2}$; $v = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} b + c}{2}$; $w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} c + a}{2}$

3°) $w - u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} (v - u)$

Ou mieux

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = -j^2$; $u = \dfrac{-j^2 a + b}{2}$; $v = \dfrac{-j^2 b + c}{2}$; $w = \dfrac{-j^2 c + a}{2}$; $w - u = -j^2 (v - u)$

$\boxed{11}$ $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}y - \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 2 \end{cases}$

$\boxed{17}$ **Partie 1**

Attention : L'hexagone $O_1AO_2BO_3C$ n'est pas régulier.

Partie 2

Solution Alexandre Manai (9 octobre 2011)

Pour démontrer que $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme, démontrons que $\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_1B_4}=\overrightarrow{B_1B_3}$.

$\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_1B_4}=\overrightarrow{B_1O_2}+\overrightarrow{O_2B_2}+\overrightarrow{B_1O_1}+\overrightarrow{O_2B_4}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_1B_4}&=\overrightarrow{B_1O_2}+\overrightarrow{O_2B_2}+\overrightarrow{B_1O_1}+\overrightarrow{O_2B_4}\\&=\overrightarrow{B_1O_2}+\overrightarrow{O_2B_2}+\overrightarrow{O_2M}+\overrightarrow{MO_4}\qquad\text{(par égalité des vecteurs dans les losanges)}\\&=\overrightarrow{B_1O_2}+\overrightarrow{O_2B_2}+\overrightarrow{B_2O_3}+\overrightarrow{O_3B_3}\\&=\overrightarrow{B_1O_3}\end{aligned}$$

Ainsi, on n'utilise pas la partie 1.

$\boxed{20}$ 1°) $\mathrm{H}\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2}\ ;\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2}\right)$; 2°) $\mathrm{K}\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\ ;\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$

$\boxed{22}$ 1°) $\begin{cases}x'=-x\\y'=-2x+y\end{cases}$; 2°)

$\boxed{24}$ 2°) Démontrons que si z est solution de (E), alors $\mathrm{M}(z)\in\mathcal{E}$.

z est solution de (E)
$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow z^2+2\mathrm{i}az-2a=0\\&\Leftrightarrow z^2=-2\mathrm{i}az+2a\\&\Leftrightarrow z^2=2a(1-\mathrm{i}z)\\&\Leftrightarrow z^2=-2a\mathrm{i}(z+1)\\&\Leftrightarrow \frac{z^2}{z+1}=-2a\mathrm{i}\\&\Rightarrow Z\in\mathrm{i}\mathbb{R}\end{aligned}$$

$\boxed{25}$ On a : $\tan\left(\vec{i},\vec{u}\right)=m$; $\tan\left(\vec{u},\vec{u}'\right)=\dfrac{\sin\left(\vec{u},\vec{u}'\right)}{\cos\left(\vec{u},\vec{u}'\right)}=\dfrac{\det_B\left(\vec{u},\vec{u}'\right)}{\left(\vec{u}\mid\vec{u}'\right)}$

Application : $\tan\alpha=3$; $\alpha\approx 71{,}57°$

$\boxed{26}$

On a : $\begin{cases}x=X+Y\\y=X-Y\end{cases}$.

$2X^3+6XY^2+3\left(X^2-Y^2\right)=1$

$8X^3-1-(6X-3)\left(X^2-Y^2\right)=0$

$(2X-1)\left(X^2+3Y^2+2X+1\right)=0$

$(2X-1)\left[(X+1)^2+3Y^2\right]=0$

$X=\dfrac{1}{2}$ ou $\begin{cases}X=-1\\Y=0\end{cases}$

$x+y=1$ ou $x=y=-1$

$\mathcal{C}$ est la réunion de la droite d'équation $x+y=1$ et de l'ensemble constitué du point $\mathrm{A}(-1\,;-1)$.

$\boxed{27}$ 1°) $\begin{cases}X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\\Y=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\end{cases}$; 2°) $XY=1$

$\boxed{28}$ 1°) $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$; $x-y=1$; $y=x-1$ privé de … ?

2°) $x^2+y^2=x+y$; $\mathcal{C}\left|\begin{array}{l}\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$ privé de … ?

$\boxed{29}$ $\mathrm{I}\left|\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right.$; $\mathrm{C}\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.$; $\mathrm{A}\left|\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$; $\mathrm{B}\left|\begin{array}{l}-1\\0\end{array}\right.$

(AB) : $y=x+1$; (AC) : $y=-x+1$; $\Delta: y=mx$; $\mathrm{D}\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{m-1}\\\dfrac{m}{m-1}\end{array}\right.$; $\mathrm{E}\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+m}\\\dfrac{m}{1+m}\end{array}\right.$; $m\neq1$; $m\neq-1$.

(BE) : $mx-(m+2)y=-m$; (CD) : $mx+(m-2)y=m$

$\mathrm{J}\left(-\dfrac{2}{m},1\right)$ $(m\neq0)$ donc le lieu des points J est la droite d'équation $y=1$ privée des points $\mathrm{M}_1(-2,1)$ et $\mathrm{M}_2(2,1)$.

Autre méthode : $\Delta:\cos\theta\,x+\sin\theta\,y=0$; $\mathrm{J}(-2\tan\theta,1)$

$\boxed{30}$ $\mathrm{I}_1\left(\dfrac{R\cos\theta-R'\sin\theta}{2};\dfrac{R\sin\theta+R'\cos\theta}{2}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{I}_2\left(\dfrac{R\cos\theta+R'\sin\theta}{2};\dfrac{R\sin\theta-R'\cos\theta}{2}\right)$

$\mathrm{I}_1\big(r\cos(\theta+\varphi);r\sin(\theta+\varphi)\big)$ et $\mathrm{I}_2\big(r\cos(\theta-\varphi);r\sin(\theta-\varphi)\big)$ avec $r=\dfrac{\sqrt{R^2+R'^2}}{2}$ et φ un réel tel que $\cos\varphi=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+R'^2}}$; $\sin\varphi=\dfrac{R'}{\sqrt{R^2+R'^2}}$.

Le lieu des points I est le cercle de centre O et de rayon r.

$\boxed{37}$ 2°) Le point A(– 2 ; – 1) appartient à la droite $\mathcal{D}$.
Le vecteur $\vec{u}$ (4 ; 3) est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$\begin{cases}x'=\dfrac{7}{25}x+\dfrac{24}{25}y-\dfrac{12}{25}\\y'=\dfrac{24}{25}x-\dfrac{7}{25}y+\dfrac{16}{25}\end{cases}$ ou $\begin{cases}x'=\dfrac{7x+24y-12}{25}\\y'=\dfrac{24x-7y+16}{25}\end{cases}$ (On vérifie que A est invariant dans ces formules).

$\boxed{38}$ Formules de changement de repère $\begin{cases} X = -x - y + 1 \\ Y = y \end{cases}$

L'ensemble des points cherché est la droite d'équation $2x + y = 1$; il s'agit de la médiane issue de C dans le triangle ABC.

$\boxed{39}$

$\boxed{40}$ $\underbrace{\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B}} + \underbrace{\cos 2\hat{C} + 1} = 0$

$$2\cos\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)+2\cos^2\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=0$$

$$2\cos\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left[\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)+\cos\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\right]=0$$

$$4\cos\left(\pi-\hat{C}\right)\cos\hat{A}\cos\hat{B}=0$$

$$-4\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}=0$$

$\boxed{41}$ 2°) $\mathrm{OM}' = \dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\boxed{42}$ **Le théorème de Napoléon**

Retenir que le côté x du triangle PQR vérifie l'égalité $x^2 = \dfrac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}S$.

$\boxed{45}$ $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{4}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{2}{5} \end{cases}$

$\boxed{46}$ $\mathcal{D}'_1 : x + 2y + 13 = 0$

$\boxed{50}$ $\begin{cases} x' = \dfrac{9x-6y+16}{13} \\ y' = \dfrac{-6x+4y+24}{13} \end{cases}$ (2 méthodes : système ou prendre la droite (MM') en paramétriques)

$\boxed{51}$ (AB') : $bx + y - b = 0$; (A'B) : $x + ay - a = 0$; (CC') : $(b-1)x + (1-a)y + a - b = 0$.

$$\begin{vmatrix} b & 1 & -b \\ 1 & a & -a \\ b-1 & 1-a & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 1 & -b \\ 1 & a & -a \\ b & 1 & -b \end{vmatrix} = 0$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

Détail pour les équations de droites :

$(\mathrm{AB}') : \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{b} = 1$; $bx + y - b = 0$

$(\mathrm{A'B}) : \dfrac{x}{a} + y = 1$; $x + ay - a = 0$

(CC') :

$\mathrm{C}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$; $\mathrm{C}'\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & a-1 \\ y-1 & b-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(b-1)(x-1)-(a-1)(y-1)=0$$

$$(b-1)x-(a-1)y+a-b=0$$

$$(b-1)x+(1-a)y+a-b=0$$

$\boxed{52}$ A(1 ; 0), B(0 ; 1), C(1 ; 1), H(a ; 0), E(0 ; b), F(a ; 1), G(1 ; b)

(EF) : $(b-1)x + ay - ab = 0$; (OC) : $x - y = 0$; (GH) : $bx + (a-1)y - ab = 0$.

$$\begin{vmatrix} b-1 & a & -ab \\ 1 & -1 & 0 \\ b & a-1 & -ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ b & a-1 & -ab \end{vmatrix} = 0$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$\boxed{53}$ $a = 1$; A(11, – 6)

$\boxed{56}$ 2°) $R + R' \geqslant 1$ $\quad R + R' - 1 \geqslant 0$ $\quad R^2 + R - 1 \geqslant 0$

$\boxed{58}$ 2°) Il faut utiliser la formule de dédoublement des termes pour trouver une équation de tangente à un cercle.
Equation de la tangente :
$(x_0-1)x + (y_0-1)y + 1 - x_0 - y_0 = 0$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{x_0+y_0-1}{x_0-1} ; 0\right)$

$\mathrm{Q}\left(0 ; \dfrac{x_0+y_0-1}{y_0-1}\right)$

3°) (BP) : $\dfrac{x_0-1}{x_0+y_0-1}x + y = 1$; (AQ) : $x + \dfrac{y_0-1}{x_0+y_0-1}y = 1$; (OM) : $y_0x - x_0y = 0$

On pose $S = x_0 + y_0 - 1$.

$$\begin{cases} (x_0-1)x + Sy = S \\ Sx + (y_0-1)y = S \end{cases}$$

On note Δ le déterminant du système.

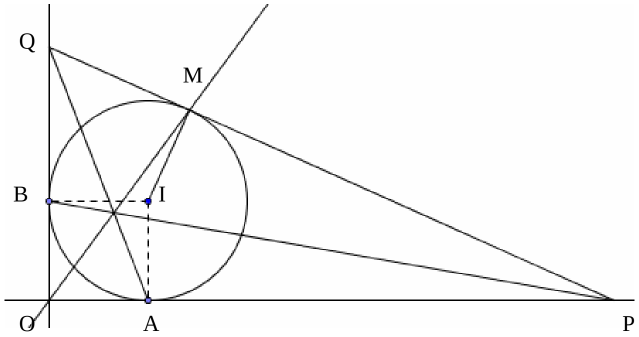
On utilise les formules de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} S & S \\ S & y_0-1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{S\left[(y_0-1)-S\right]}{\Delta} = -\frac{x_0S}{\Delta}$$

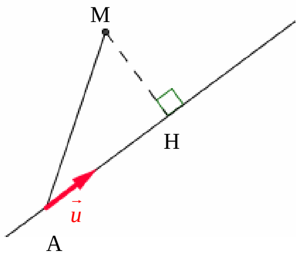
$$y = -\frac{y_0S}{\Delta}$$

$\mathrm{N}\left(-\dfrac{x_0 S}{\Delta}\,;-\dfrac{y_0 S}{\Delta}\right)$

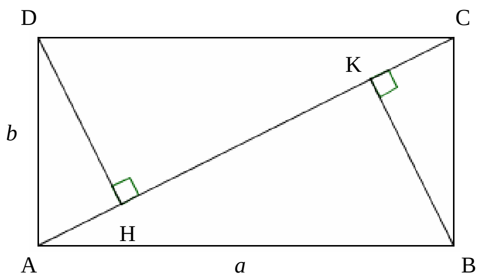
On vérifie que $\mathrm{N} \in (\mathrm{OM})$.



59 1°)

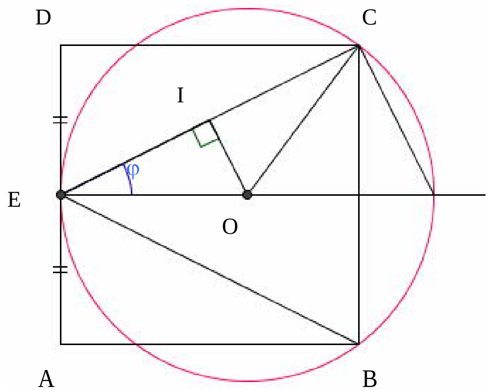


2°) Il faut distinguer le cas $a > b$ et le cas $b < a$.



60 2°) La tangente à $\mathcal{C}$ en A a pour équation $3x - 2y + 9 = 0$.
Utiliser la règle de dédoublement des termes.

64 Cercle circonscrit



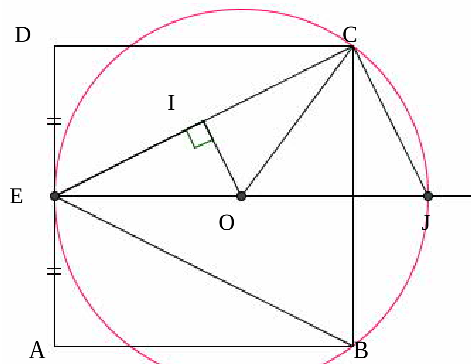
$\mathrm{AC} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$\tan \varphi = \dfrac{1}{2}$

$\cos \varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{EI}}{\cos \varphi} = \frac{\dfrac{a\sqrt{5}}{4}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5a}{8}$$

Autre méthode :



On note J le point d'intersection de la demi-droite [EO).

Le théorème de la droite des milieux dans le triangle ECJ donne CJ = 2 IO.

$\boxed{66}$ $BC = \dfrac{8}{5}a$

$\boxed{67}$ En découpant le carré en 9 cases, chacun des sous-carrés a une diagonale valant $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Comme il y a 10 points, on utilise le principe de Dirichlet pour conclure.

$\boxed{69}$ On exprime la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{UA}$ et $\overrightarrow{VB}$ ainsi que l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{UA}$ (en notant P et R les milieux respectifs de [UA] et [VB]).

On trouve $VH = \sqrt[3]{2}$.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Formules de changement de repère par rotation pour des repères orthonormés. Faire la démonstration.
On pourra écrire ces formules matriciellement.

$\boxed{2}$ Donner la formule donnant la distance d'un point à une droite dans le plan muni d'un repère orthonormé et faire la démonstration.

$\boxed{3}$ Donner une équation polaire d'une droite dans le plan orienté muni d'un repère polaire

- lorsque cette droite passe par l'origine.
- lorsque cette droite ne passe pas par l'origine.

Faire la démonstration.

$\boxed{4}$ Équation cartésienne d'une droite ; équations paramétriques d'une droite dans le plan muni d'un repère quelconque.

$\boxed{5}$ **Principe du repérage polaire dans le plan orienté**
Le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Donner la définition d'un couple de coordonnées polaires (ρ ; θ) d'un point M du plan.
Illustrer le cas où ρ > 0 et le cas où ρ < 0.
Donner tous les couples de coordonnées polaires de M.
2°) Soit M un point distinct de l'origine O. On pose ρ = OM.
Donner les deux familles de coordonnées polaires du point M.
3°) Soit M et M' deux points distincts de O admettant pour systèmes de coordonnées polaires (ρ ; θ) et (ρ' ; θ').
Caractériser M = M'.
4°) Donner la relation entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes.
5°) Qu'appelle-t-on équation polaire d'une courbe ?

$\boxed{6}$ Donner une équation polaire d'un cercle

- passant par l'origine du repère
- de centre l'origine du repère

dans le plan orienté d'un repère polaire.
Refaire la démonstration.

$\boxed{7}$ Équations paramétriques d'un cercle dans le plan muni d'un repère orthonormé.

$\boxed{8}$ Déterminant de deux vecteurs dans une base des vecteurs du plan : définition, propriétés.
On suppose que le plan est orienté et muni d'un repère orthonormé direct.
Démonstration de $\det_B\left(\vec{u}, \vec{u}'\right) = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \sin\theta$ où $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs non nuls, θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{u}'\right)$ et *B* une base orthonormée directe de l'ensemble des vecteurs du plan.
Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs à l'aide du déterminant.

$\boxed{9}$ Équation normale d'une droite.

$\boxed{10}$ Que signifie (ρ ; θ) est un système de coordonnées polaires du point M dans le repère polaire $\left(O ; \vec{i}\right)$?

11 Déterminer la nature de la courbe d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (a, b, c sont trois réels donnés).

12 Orientation du plan. Définition du déterminant de deux vecteurs. Expression dans une base orthonormée directe.
Formule de l'aire d'un parallélogramme à l'aide d'un déterminant. Notion d'aire algébrique.

13 C.N.S. d'alignement de trois points dans le plan (à l'aide d'un déterminant d'ordre 3).

14 Paramétrisation rationnelle d'un cercle (par intersection d'une droite avec le cercle).
Paramétrisation trigonométrique d'un cercle.

15 C.N.S. pour que trois droites du plan soient parallèles ou concourantes.

16 Lignes de niveau.

17 **Règle de dédoublement des termes pour trouver une équation d'une tangente à un cercle.**
Cas d'un cercle donné par une équation normale.
Cas d'un cercle donné par une équation développée réduite.

18 C.N.S. pour que 4 points soient cocycliques grâce à leurs coordonnées dans un repère orthonormé.
Les quatre points de coordonnées (– 2 ; – 1), (1 ; 5), (5 ; 3) et (5,5 ; 0,5) sont-ils situés sur un même cercle ?

Quelques réponses

13 $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

17 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; tangente : $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$

18 $\mathrm{M}_1(x_1\,;y_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2\,;y_2)$, $\mathrm{M}_3(x_3\,;y_3)$, $\mathrm{M}_4(x_4\,;y_4)$

$$\begin{vmatrix} {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2+{y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Question supplémentaire tirée du numéro de Tangente septembre – octobre 2010 page 34 :

Les quatre points de coordonnées (– 2 ; – 1), (1 ; 5), (5 ; 3) et (5,5 ; 0,5) sont-ils situés sur un même cercle ?

N.B. : On pourrait aussi utiliser la relation de Ptolémée.