Exercices sur les équations différentielles

Le 20 août 2019

Exercices de Monsieur Héroult notés

Soit q une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $\forall x > x_0 \quad q(x) > 0$ et $q'(x) \geqslant 0$.

Démontrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

J'ai trouvé dans le document suivant :

Frédéric Boyer université de Toulouse

Exercice 3 ([Gou94, p. 372])

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, strictement positive et croissante.

Montrer que toutes les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Indication : on pourra multiplier l'équation par y' puis intégrer par parties entre 0 et t.

Soit y une solution de l'équation proposée. Suivons l'indication :

$$0 = \int_0^t y''y' + qyy'\,ds = \frac{1}{2}(y'(t)^2 + q(t)y(t)^2) - \frac{1}{2}(y'(0)^2 + q(0)y(0)^2) - \frac{1}{2}\int_0^t q'y^2\,ds.$$

Il reste, en posant $C = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2$

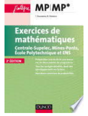
$$y'(t)^2 + q(t)y(t)^2 = C + \int_0^t \frac{q'}{q} qy^2\,ds.$$

On peut donc appliquer le lemme de Gronwall à la fonction qy^2 et obtenir

$$q(t)y^2(t) \leq C\exp\left(\int_0^t \frac{q'}{q}\,ds\right) = C\exp(\log(q(t)) - \log(q(0))) = C'q(t).$$

F. Boyer - Version du 19 octobre 2017

Obtenir la version papier de ce livre▼



Exercices de mathématiques MP-MP*: Centrale-SupElec, Mines-Ponts, Ecole ...

De Thierry Dugardin, Marc Rezzouk

Exercice 7.23

Soit $q : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_-^*$ une fonction continue **strictement négative**. On s'intéresse dans cet exercice aux solutions sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_q) : y'' + qy = 0$$

On note $y_1 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ la solution de $(\mathcal{E}_q)$ vérifiant $y_1(0) = 1 = y_1'(0)$.

1) a) Démontrer que la fonction y_1 est strictement positive, strictement croissante et convexe sur $\mathbf{R}_+$.

b) Démontrer que la fonction $\frac{1}{y_1^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

2) a) Démontrer que la fonction

$$y_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto y_1(x)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)}$$

est une solution de $(\mathcal{E}_q)$.

b) Est-ce que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{E}_q)$?

c) Étudier le sens de variation de y_2. En déduire que y_2 possède une limite finie en $+\infty$.

d) Parmi les solutions de $(\mathcal{E}_q)$ sur $\mathbf{R}_+$, quelles sont celles qui sont bornées sur $\mathbf{R}_+$?

3) On suppose dans cette question que la fonction q est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Démontrer que $y_2'(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.

Solution **1) a)** Supposons que y_1 s'annule au moins une fois dans $\mathbf{R}_+$. On note

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid y_1(x) = 0\} \text{ et } c = \inf \mathrm{X}$$

Or X est une partie fermée de $\mathbf{R}$, donc $c \in \mathrm{X}$. De plus, comme $y_1(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que $y_1 > 0$ sur $[0, c[$. On en déduit que $y_1'' > 0$ sur $[0, c[$, donc

$$\forall x \in]0, c[,\ y_1(x) \geqslant y_1'(0)(x - 0) + y_1(0)$$

481

différentielles y"(t)+q(t) y(t)=0 q positive, croissante "sont bornées" donc $0 < \frac{1}{y_1^2(x)} \leqslant \frac{1}{(x+1)^2}$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, il en est de même de $\frac{1}{y_1^2}$.

2) a) On considère la fonction

$$y_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto y_1(x)\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)}$$

Comme y_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$, il en est de même de y_2. De plus,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ y_2'(x) = y_1'(x)\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)} - \frac{1}{y_1(x)}$$

puis pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$y_2''(x) = y_1''(x)\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)} - \frac{y_1'(x)}{y_1^2(x)} + \frac{y_1'(x)}{y_1^2(x)}$$
$$= -q(x)y_1(x)\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)} = -q(x)y_2(x)$$

1 Résoudre l'équation différentielle $y'+y=\sin t$.

Indication : Considérer l'équation complexe $y'+y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ (on pourra utiliser la forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$).

2 Déterminer les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on ait :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f'(x)+1.$$

On veillera à la rigueur.

3 1°) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

2°) Résoudre l'équation différentielle $y''+6y'+9y=\dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Déterminer l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x)-\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t = x.$$

5 Résoudre (dans $\mathbb{R}$) les équations différentielles

$y'+y=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ (E) ; $y'+y=\cos x$ (E').

6 Résoudre (dans $\mathbb{R}$) les équations différentielles

$y'+y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$ (E) ; $y'+y=\sin t+3\sin(2t)$ (E').

7 Déterminer l'ensemble des fonctions f définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x)+\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

8 1°) Donner les solutions de l'équation différentielle $xy'+2y=\dfrac{x}{x^2+1}$ (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.

2°) Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$, notée f.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

9 Résoudre l'équation différentielle : $y''-y=\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{3t}$.

10 Résoudre l'équation différentielle $y'+y=t\sin t$.

On pourra considérer l'équation différentielle $z'+z=t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

11 1°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ on ait : $\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}$.

2°) Résoudre l'équation différentielle $x(x-1)y'+y=x$.

12 Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y'+xy=5$.

13 Résoudre (dans $\mathbb{R}$) l'équation différentielle $y''+y=\cos^3 x$.

14 Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+5y=\operatorname{sh} x$.

15 Résoudre l'équation différentielle $(4-x^2)y'+xy=2$.

On vérifiera que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est une solution particulière de cette équation différentielle.

16 Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+y=4\mathrm{e}^{-x}$.

17 Résoudre l'équation différentielle $3y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}}{t^2-t-6}$.

18 1°) Résoudre les équations différentielles $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ et $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$.

2°) En déduire la résolution de l'équation différentielle $y''+2y'+y=2x\cos x\operatorname{ch} x$.

19 Résoudre l'équation différentielle $y'+y=t\operatorname{ch} t$.

20 Résoudre l'équation différentielle $y''-4y=4t^2-4t$.

21 Résoudre l'équation différentielle $4y''+4y=\mathrm{e}^{2t}$.

22 Résoudre l'équation différentielle $y''-3y'+2y=t\mathrm{e}^{2t}$.

23 Résoudre l'équation différentielle $y''+y=t\cos t$.

24 Résoudre l'équation différentielle $y''+y'+y=t\cos t$.

25 Résoudre l'équation différentielle $y''-y=te^t$.

26 1°) On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{3t^2-2}{t\left(t^2-1\right)}$.

Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\,;-1\}$, on ait $f(t)=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t-1}+\dfrac{c}{t+1}$.

2°) Résoudre l'équation différentielle $ty'+2y=\dfrac{3t^2-2}{t^2\left(t^2-1\right)}$.

27 Résoudre l'équation différentielle $y'-y=x^2e^x$.

28 Résoudre l'équation différentielle $xy'+y=\dfrac{1}{x^2}$.

29 Résoudre les équations différentielles

$y''-2y'+y=\cos x$

$y''-2y'+y=e^{-x}$

$y''-2y'+y=xe^x$

$y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$

30 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} y'=2z \\ z'=-y+te^t \end{cases}$.

Déterminer la solution (f, g) du système vérifiant $f(0)=g(0)=0$.

31 Résoudre l'équation différentielle $y''-4y=4t^2-4t$.

32 Résoudre l'équation différentielle $4y''+4y=e^{2t}$.

33 Résoudre l'équation différentielle $y''-3y'+2y=te^t$.

34 Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on ait :

$f'(x)=f(x)+\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

35 Résoudre l'équation différentielle $y''-3y'+2y=x\,e^{|x|}$.

36 Résoudre l'équation différentielle $xy'=2y+x$ où x désigne la variable.
Déterminer la solution dans chacun des deux cas suivants :
1°) $y(1)=0$; 2°) $y(0)=0$.

37 Résoudre l'équation différentielle $y-xy'=x^2-1$.

38 Résoudre l'équation différentielle $xy'+2x-y=0$.

39 Résoudre l'équation différentielle $xyy'+x^2+y^2=0$.

40 Résoudre l'équation différentielle $xy'-y=\ln x$.

41 Résoudre l'équation différentielle $\left(1-x^2\right)y'+xy=2x$.

42 Résoudre l'équation différentielle $2xy'+y=\dfrac{1}{x}$.

43 Résoudre l'équation différentielle $xy'+(1+x)y=0$.

44 Résoudre l'équation différentielle $y'+y=x^2$.

45 Résoudre l'équation différentielle $\left(1+x^2\right)y'-xy=1$.

46 Résoudre l'équation différentielle $y''+6y'+9y=|\,x\,|$.

47 Résoudre l'équation différentielle $y''+6y'+9y=\left|\,x^2-4x+3\,\right|$.

Existe-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}$? de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

48 Résoudre l'équation différentielle $y''-4y'+4y=2(x-1)e^x$.

49 Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle $y'=|\,y-1\,|$ (E).
1°) Déterminer le sens de variation des solutions de (E).

2°) On suppose que (E) admet une solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne prend pas la valeur 1.

a) Démontrer que soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)>1$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)<1$.
b) Déterminer les solutions dans ce cas.
3°) On suppose que (E) admet une solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en un réel x_0.

a) Démontrer que $\forall x \leqslant x_0 \quad f(x) \leqslant 1$ et que $\forall x \geqslant x_0 \quad f(x) \geqslant 1$.
b) Déterminer les solutions dans ce cas.
4°) Représenter l'allure des courbes intégrales dans le plan.

50 On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$(x-1)y''-xy'+y=0$.

1°) Démontrer que, si $f \in E$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\,1\,\}$, on a : $f^{(3)}(x)=f''(x)$.

En déduire que, si $f \in E$, alors $f^{(3)}=f''$.
2°) En déduire l'ensemble E.

$\boxed{51}$ Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions dérivables *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \times f(-x) = 1$.

1°) Démontrer que *f* et f' ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que *f* est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ en justifiant.

3°) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) \times f(x) = \left[f'(x) \right]^2$.

4°) Démontrer que la fonction $g = \dfrac{f'}{f}$ est constante.

En déduire que *f* est une équation différentielle du premier ordre.
5°) Conclure.

$\boxed{52}$ 1°) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x + 1 \quad (\mathrm{E})$.
2°) Faire le tableau de variation des solutions avec les limites (distinguer des cas suivant les valeurs du paramètre).
3°) Que peut-on dire de la branche infinie des courbes intégrales en $+\infty$?
Donner l'allure des courbes intégrales dans le plan muni d'un repère sur un même graphique (préciser le point d'intersection des courbes avec l'axe des ordonnées).

$\boxed{53}$ Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 13y = \mathrm{e}^{-2x} \sin^3 x$.

$\boxed{54}$ Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25 \sin 2x$.

$\boxed{55}$ Soit *n* un entier naturel non nul.
On considère la fonction *u* définie par $u(x) = x^n \,\mathrm{e}^{-x}$.
1°) Déterminer une équation différentielle homogène du premier ordre vérifiée par *u*.
2°) On pose $v = u^{(n)}$.
Démontrer que *v* est solution de l'équation différentielle $xy'' + (1+x)y' + (n+1)y = 0$.
Indication : appliquer la formule de Leibniz à la relation précédente de manière à faire apparaître *v*.

$\boxed{56}$ Soit $f : x \mapsto \left(x^2 - 1\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.
1°) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par *f*.
2°) On pose $g = f^{(n)}$.
Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par *g*.

$\boxed{57}$ Soit *f* une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ où ℓ est un réel.

Soit *g* une solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$.

Démontrer que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

$\boxed{58}$ Déterminer les fonctions continues *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel *x*, on ait : $f(x) + \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

$\boxed{59}$ Résoudre l'équation différentielle $y' - (\tan x)\, y = \sin x$.

$\boxed{60}$ Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = \sqrt{x}$.

$\boxed{61}$ Résoudre l'équation différentielle $\left(4 - x^2\right) y' + xy = 2$.

On cherchera une solution particulière « évidente » de l'équation différentielle.
Déterminer la nature des courbes intégrales sur chaque intervalle.

$\boxed{62}$ Résoudre l'équation différentielle $\left(t^2 - 4\right) y' + ty = 2$.

On pourra se référer aux primitives :

Une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}}$ où est *a* est un réel non nul est la fonction

$t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2 - a^2}\right)$ (on peut aussi utiliser la fonction Argch).

$\boxed{63}$ Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = \left(x + x^3\right)\mathrm{e}^{2x}$.

$\boxed{64}$ Résoudre l'équation différentielle $ty' + 2y = \dfrac{t}{t^2 + 1}$.

Étudier s'il existe une solution définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{65}$ Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ telles que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(-x) = x + \mathrm{ch}\, x \quad (\mathrm{E})$.

Soit *f* une fonction vérifiant les conditions : elle est définie sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, la relation (E) est vraie.
On note *g* la partie paire de *f* et *h* la partie impaire de *f*.

1°) Démontrer que *g* est solution de $y'' + y = \mathrm{ch}\, x$.
En déduire *g*.
2°) Démontrer que *h* est solution de $y'' - y = x$.
En déduire *h*.
3°) Conclure.

$g(x) = \lambda \cos x + \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{2}$

Partie A

Soit *a*, *b*, *c*, λ quatre réels tels que $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle $ay''+by'+cy=\mathrm{e}^{\lambda t}$ (E).

On pose $P(t)=at^2+bt+c$.

Démontrer les propositions suivantes :

- Si $P(\lambda)\neq 0$, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{P(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t}$ est une solution particulière de (E).
- Si λ est racine simple de *P*, alors $t \mapsto \dfrac{t}{P'(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t}$ est une solution particulière de (E).
- Si λ est racine double de *P*, alors $t \mapsto \dfrac{t^2}{P''(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t}$ est une solution particulière de (E).

Partie B

Résoudre l'équation différentielle $y''+y=\cos 2x$ (solutions réelles).

Indication : Considérer l'équation différentielle complexe associée $y''+y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}$.

1°) On considère l'équation différentielle $ay''+by'+cy=P(x)\mathrm{e}^{mx}$ (E) où *a*, *b*, *c*, *m* sont des nombres complexes et *P* une fonction polynôme.
Soit *Q* une fonction définie et deux fois dérivable sur R.
Démontrer que la fonction $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ est solution de (E) si et seulement si

$aQ''+(2am+b)Q'+(am^2+bm+c)Q=P$.

2°) Résoudre l'équation différentielle $y''+4y'+4y=x^2\mathrm{e}^{-2x}$ (utiliser le 1°) pour déterminer une solution particulière).

Résoudre l'équation différentielle $xy''+2y'+xy=0$.
On posera $z=xy$.
Déterminer les solutions prolongeables en 0.

Résoudre l'équation différentielle y''+4y'+4y=choix.

57 à arranger

Exercices sur les systèmes différentiels

Résoudre l'équation différentielle y'''-2y''-5y'+6y=0.
On pourra écrire puis résoudre le système différentiel associé.

Ex. équations différentielles MPSI
Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions y et z définies sur R dérivables telles que l'on ait y'=y+z et z'=5y-3z, y(0)=1, z(0)=1.
Pour cela, on considère les fonctions u=y-z et v=5y+z.
1°) Trouver une équation différentielle vérifiée par u ; en déduire u.
2°) Trouver une équation différentielle vérifiée par v ; en déduire v.
3°) Trouver les fonctions *u* et *v*.

On considère le système différentiel y'=5y-2z+e^t // z'=-y+6z+t
1°) Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction u=y+z.
2°) Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction v=y-2z.
3°) Déterminer l'ensemble des solutions du système.

Résoudre l'équation différentielle x^2y'=y.
Étudier le problème de Cauchy en un point (x0,y0) appartenant à R^2.

Résoudre l'équation différentielle xy'-2y=x.
Faire l'étude du problème de Cauchy en un point (existence, unicité de la solution).

Déterminer les solutions de l'équation différentielle y'+2y=y^2 qui ne s'annulent pas.
Indication : Poser z=1/y ; faire attention à la fin au signe de la constante.
Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur R telles que pour tout réel x on a : f'(x)xf(-x)=1.
Indication : On pourra poser f(0)=a et considérer la fonction g définie par g(x)=f(x)xf(-x).

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f définies et deux fois dérivables tells que : pour tout réel x on ait : [f'(x)]^2-[f(x)]^2=1 et f'(0)=1.
1°) Démontrer que f' ne s'annule pas.
2°) Calculer f(0).
3°) Former une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.
4°) Conclure.

Réponses

1 $\left\{t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)+\lambda \mathrm{e}^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

2 $f(x)=\lambda \mathrm{e}^{x}+(1+\lambda)\mathrm{e}^{-x} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

3 2°) L'équation différentielle est équivalente à $\left(\mathrm{e}^{3x}y\right)''=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$$y=\mathrm{e}^{-3x}\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}\right]+\lambda x\mathrm{e}^{-3x}+\mu\mathrm{e}^{-3x}$$

5 (E) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)+\lambda\mathrm{e}^{-x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; (E') $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x+\lambda\mathrm{e}^{-x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$y'+y=\cos x \quad (\mathrm{E'})$

Équation homogène : $y'+y=0$

Ensemble des solutions $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

$\cos x=\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{ix}$

$y'+y=\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{ix}$

On cherche une solution particulière de $y'+y=\mathrm{e}^{ix}$.

$1+\mathrm{i}\neq 0$ donc de la forme $\alpha\mathrm{e}^{ix}$.

$\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{ix}+\alpha\mathrm{e}^{ix}=\mathrm{e}^{ix}$

$$\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}$$

$y'+y$

2nd membre	Solution particulière
e^{ix}	$\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{ix}$
$\cos x$	$\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x$

D'où l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E'})$ est $\left\{x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x+\lambda\mathrm{e}^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

6 (E) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)+\lambda\mathrm{e}^{-x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; (E') $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\lambda\mathrm{e}^{-x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-x}+\frac{3}{5}\sin 2x-\frac{6}{5}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

8 (E) $f(x)=\dfrac{x-\mathrm{Arctan}\,x}{x^2}+\dfrac{k}{x^2}$ $(k \in \mathbb{R})$

9 $f: t \mapsto a\mathrm{e}^{t}+b\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{t}-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{3t} \quad \left((a\,;b)\in \mathbb{R}^2\right)$

10 $f: t \mapsto \dfrac{1}{2}t(\sin t-\cos t)+\dfrac{1}{2}\cos t+\lambda\mathrm{e}^{-t} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

On pose $z=(at+b)\mathrm{e}^{it}$ avec $(a\,;b)\in\mathbb{C}^2$

$a(1+\mathrm{i})t+\left[a+(1+\mathrm{i})b\right]=t$

$a=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ et $b=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

11 1°)

2°) 3 intervalles. $f(x)=\lambda\dfrac{x}{x-1}+\ln|x|\times\dfrac{x}{x-1} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Solution plus détaillée :

$\lambda'\times y_0=b$

$$\lambda'\left|\frac{x}{x-1}\right|=\frac{1}{x-1}$$

- Sur $]1\,;+\infty[$, $\lambda'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\lambda(x)=\ln x$
- Sur $]0\,;1[$, $\lambda'(x)=-\dfrac{1}{x}$, $\lambda(x)=-\ln x$
- Sur $]-\infty\,;0[$, $\lambda'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\lambda(x)=-\ln|x|$

On peut se poser la question du recollement de solutions.
En 0, on a un recollement continu mais pas dérivable.

12 $f(x)=\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}+5\dfrac{\mathrm{Argsh}\,x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

13 $y''+y=\dfrac{3}{4}\cos x+\dfrac{1}{4}\cos 3x$; $f: x \mapsto \dfrac{3}{8}\sin x-\dfrac{1}{32}\cos 3x+\lambda\cos x+\mu\sin x \quad \left((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right)$

14 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(a\cos 2x+b\sin 2x)+\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-x} \quad \left((a,b)\in\mathbb{R}^2\right)$

15 $x \mapsto \dfrac{x}{2}+\lambda\sqrt{\left|4-x^2\right|} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

16 -1 est solution double de l'équation caractéristique.
Cas de résonance.
L'équation différentielle s'écrit $\left(\mathrm{e}^{x}y\right)''=4$.

$\mathrm{e}^{x}y=2x^2+\lambda x+\mu$

$\boxed{19}$ $f : t \mapsto \left(\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{t}+\frac{t^2}{4}\mathrm{e}^{-t}+\lambda\mathrm{e}^{-t} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

$\boxed{20}$ $f : t \mapsto t^2+t+\frac{1}{2}+\lambda\mathrm{e}^{-2t}+\mu\mathrm{e}^{2t} \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{21}$ $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2t}}{20}+\lambda\cos t+\mu\sin t \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

Solution particulière : $t\mapsto C\mathrm{e}^{2t}$ $(C\in\mathbb{R})$

$\boxed{22}$ $f : t \mapsto \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\mathrm{e}^{2t}+\lambda\mathrm{e}^{2t}+\mu\mathrm{e}^{t} \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{23}$ $f : t \mapsto \frac{1}{4}t^2\sin t+\frac{1}{4}t\cos t+\lambda\cos t+\mu\sin t \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{24}$ $f : t \mapsto \left[\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+(t-2)\sin t+\cos t \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{25}$ $f : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{t}+\mu\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{4}t(t-1)\mathrm{e}^{t}$ $((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{26}$ 1°) Décomposer en éléments simples $f(t)=\frac{3t^2-2}{t(t^2-1)}$.

$$f(t)=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{t+1}$$

$$f(t)=\frac{2}{t}+\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+1)}$$

2°) Résoudre l'équation différentielle $ty'+2y=\frac{3t^2-2}{t^2(t^2-1)}$.

Il faut distinguer trois intervalles.

$y'+ay=b$

On note y_0 une solution non nulle de l'équation différentielle $y'+ay=0$.

On pose $y=\lambda y_0$.

On obtient $\lambda' y_0=b$.

On prend $y_0(t)=\frac{1}{t^2}$ donc $\lambda'(t)\times\frac{1}{t^2}=\frac{3t^2-2}{t^3(t^2-1)}$.

$\lambda'(t)=\frac{3t^2-2}{t(t^2-1)}$ soit $\lambda'(t)=f(t)$ donc $\lambda(t)=2\ln|t|+\frac{\ln|t-1|}{2}+\frac{\ln|t+1|}{2}$.

$$y(t)=\frac{\lambda}{t^2}+\frac{2\ln|t|}{t^2}+\frac{\ln|t-1|}{2t^2}+\frac{\ln|t+1|}{2t^2}$$

$\boxed{27}$ $f : x\mapsto \lambda\mathrm{e}^{x}+\frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{x} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

$\boxed{28}$ $xy'+y=\frac{1}{x^2} \rightarrow (xy)'=\frac{1}{x^2}$

$\boxed{29}$

$f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\sin x$

$f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$

$f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$

$f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}+(x\ln|x|-x)\mathrm{e}^{x}$

$$\begin{cases}\lambda' y_1+\mu' y_2=0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2'=d(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda' x\mathrm{e}^{x}+\mu'\mathrm{e}^{x}=0\\ \lambda'(x+1)\mathrm{e}^{x}+\mu'\mathrm{e}^{x}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\end{cases}$$

$$\lambda'=\frac{1}{x}$$

$\boxed{30}$ On sera conduit à résoudre l'équation différentielle $y''+2y=2t\mathrm{e}^{t}$.

$y=\lambda\cos(t\sqrt{2})+\mu\sin(t\sqrt{2})+\left(\frac{2}{3}t-\frac{4}{9}\right)\mathrm{e}^{t}$

$\boxed{31}$ $f(t)=t^2+t+\frac{1}{2}+\lambda\mathrm{e}^{-2t}+\mu\mathrm{e}^{2t} \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{32}$ $f(t)=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{20}+\lambda\cos t+\mu\sin t \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{33}$ Cet exercice est à rapprocher du $\boxed{22}$. Il y a juste une petite différence au niveau de l'exponentielle.

L'équation $y''-3y'+2y=t\mathrm{e}^{t}$ a pour solutions $f : t \mapsto -\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\mathrm{e}^{t}+\lambda\mathrm{e}^{t}+\mu\mathrm{e}^{2t}$.

$f(t)=2t^2\mathrm{e}^{t}+(\lambda t+\mu)\mathrm{e}^{-t} \quad ((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$ noté le 4 octobre 2012 (sur une ancienne feuille mais j'ai un doute)

Le 4 octobre 2012, j'ai donné cet exercice au lycée Hoche.

L'élève a trouvé : $f : t \mapsto \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\mathrm{e}^{t}+\lambda\mathrm{e}^{t}+\mu\mathrm{e}^{2t}$.

$\boxed{34}$ Poser $K=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$y'=y+K$

$y=C\mathrm{e}^{-x}-K$

$x\mapsto \frac{2K}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^x-K$

$\boxed{35}$ Sur $\mathbb{R}_+$, $f:x\mapsto \alpha\mathrm{e}^x+\beta\mathrm{e}^{2x}+\left(-\frac{1}{2}x-1\right)\mathrm{e}^x$

$\boxed{36}$ $y(x)=kx^2-x$

$\boxed{37}$ $y-xy'=x^2-1$; $y=kx-x^2-1$

$\boxed{38}$ $xy'+2x-y=0$; $y=kx-2x\ln x$

$\boxed{39}$ $xyy'+x^2+y^2=0$; $y=\frac{k}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$\boxed{40}$ $xy'-y=\ln x$; $y=kx-\ln x-1$

$\boxed{41}$ $(1-x^2)y'+xy=2x$; $y=k\sqrt{|x^2-1|}+2$

$\boxed{42}$ $2xy'+y=\frac{1}{x}$; $y=\frac{k}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

$\boxed{43}$ $xy'+(1+x)y=0$; $y=k\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

$\boxed{44}$ $y'+y=x^2$; $y=k\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x-2)$

$\boxed{45}$ $(1+x^2)y'-xy=1$; $y=k\sqrt{1+x^2}+x$ (solution particulière $x\mapsto x$)

$\boxed{46}$ $y''+6y'+9y=|x|$.

$x\mapsto(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^{-3x}+\frac{x}{9}-\frac{2}{27}$

$x\mapsto(\lambda'+\mu' x)\mathrm{e}^{-3x}-\frac{x}{9}+\frac{2}{27}$

$\lambda'=\lambda-\frac{2}{3}$

$\mu'=\mu+\frac{4}{27}$

$\boxed{47}$ $y''+6y'+9y=|x^2-4x+3|$

$\frac{x^2}{9}-\frac{16}{27}x+\frac{57}{9}$

$-\frac{x^2}{9}+\frac{16}{27}x-\frac{57}{9}$

$\boxed{48}$ $y''-4y'+4y=2(x-1)\mathrm{e}^x$

$x\mapsto(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^{2x}+2(x+1)\mathrm{e}^x$

$\boxed{50}$ $(x-1)y''-xy'+y=0$

2°) $E=\{\,x\mapsto ax+b\mathrm{e}^x,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\,\}$

$\boxed{54}$

$2\cos 2x+\sin 2x+\lambda\cos 3x\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\sin 3x\,\mathrm{e}^{2x}$

On considère les équations complexes associées : $z''-4z'+13z=10\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}$ et $z''-4z'+13z=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}$.

On ne résout en fait que l'équation $z''-4z'+13z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}$ avec solution sous la forme $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}$ où C est une constante.

$\boxed{60}$ $2xy'+y=\sqrt{x}$

Il faut dire que $x>0$ dès le début.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

$\boxed{61}$ $(4-x^2)y'+xy=2$ identique au $\boxed{15}$.

Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction $x\mapsto\frac{x}{2}$.

Sur $\mathrm{I}=]-2\,;2[$ l'ensemble des solutions est $\{x\in\mathrm{I}\mapsto\frac{x}{2}+\lambda\sqrt{4-x^2},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

$\left(y-\frac{x}{2}\right)^2=\lambda^2(4-x^2)$

$\{x\in\mathrm{I}\mapsto\frac{x}{2}+\lambda\sqrt{|4-x^2|},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{62}$ $\left(t^2-4\right)y'+ty=2$

• Sur les intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $]2\,;+\infty[$, les solutions sont les fonctions $t\mapsto \dfrac{\lambda+2\ln\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)}{\sqrt{t^2-4}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

• Sur l'intervalle $]-2\,;2[$, les solutions sont les fonctions $t\mapsto \dfrac{\lambda+2\text{Arccos}\dfrac{t}{2}}{\sqrt{4-t^2}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

On ne cherche pas s'il existe une solution définie sur $\mathbb{R}$.

Meilleure version :

On se place sur les intervalles où t^2-4 ne s'annule pas.

$y'+\dfrac{t}{t^2-4}y=\dfrac{2}{t^2-4}$

$y'+\dfrac{t}{t^2-4}y=0$

Une primitive de $\dfrac{t}{t^2-4}$ est la fonction $\dfrac{1}{2}\ln\left|t^2-4\right|$.

La solution générale de l'équation homogène est donc la fonction $t\mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-4\right|}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{\left|t^2-4\right|}}$.

La variation de la constante donne $\dfrac{\lambda'}{\sqrt{\left|t^2-4\right|}}=\dfrac{2}{t^2-4}$.

1^er^ cas : $t^2-4>0$ $\quad\lambda'=\dfrac{2}{\sqrt{t^2-4}}$

2^e^ cas : $t^2-4<0$ $\quad\lambda'=-\dfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}$

$\lambda=-2\text{Arcsin}\dfrac{t}{2}$ ou $\lambda=2\text{Arccos}\dfrac{t}{2}$

$\boxed{63}$ $y''-4y'+4y=\left(x+x^3\right)e^{2x}$

Les solutions sont les fonctions $x\mapsto\left(\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{1}{32}x\right)x^2e^{2x}+\lambda e^{2x}+\mu xe^{2x}$ (sous toute réserve pour la solution particulière, noté le 18-10-2014).

Changé le 6-11-2015 :

$y=P(x)e^{2x}$

On résout $P'(x)=x$ et $P''(x)=x^3$.

Les solutions sont les fonctions $x\mapsto\left(\dfrac{x^5}{20}+\dfrac{x^3}{6}\right)e^{2x}+\lambda e^{2x}+\mu xe^{2x}$.

$\boxed{64}$ $ty'+2y=\dfrac{t}{t^2+1}$

$f(t)=\dfrac{\lambda}{t^2}+\dfrac{1}{t}-\dfrac{\text{Arctan}\,t}{t^2}$ $\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

Solution définie sur $\mathbb{R}$ pour $\lambda=0$ (recollement des deux solutions en 0) ; travail de recollement.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Théorème d'existence de solutions de $ay'+by=0$ et de $ay'+by=c$ où a, b, c sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton telles que a ne s'annule pas sur I.

$\boxed{2}$ Théorème d'existence de solutions pour une équation différentielle de la forme $ay''+by'+cy=0$ où a, b, c sont des réels tels que $a\neq 0$.

$\boxed{3}$ Équations différentielles linéaires avec second membre exponentielle-polynôme (ou pseudo-polynôme).

$\boxed{4}$ Méthode de la variation de la constante pour une équation linéaire du premier ordre.

$\boxed{5}$ Équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Wronskien (définition, utilisation).

$\boxed{6}$ Principe de superposition de solutions pour une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre. Donner un exemple.

$\boxed{7}$ Équation différentielle linéaire homogène.

$\boxed{8}$ Variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du second ordre.

$y' + a(x) y = b(x) \quad (\mathrm{E})$

Notation : A une primitive de a

① équation homogène $\quad y' + ay = 0 \quad$ solution générale $\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

② complète (E) $\quad$ solution particulière $y_{\mathrm{p}} = \lambda(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$

Attention λ n'est pas constante.

$y_p = \lambda'(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} + \lambda(x) \times (-a(x)) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$

On « incorpore » le tout.

$\lambda'(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} - a(x) \lambda(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} + a(x) \lambda(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = b(x)$

$\lambda'(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = b(x)$ $\quad$ à apprendre par cœur

$\Updownarrow$

$\lambda'(x) = b(x) \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$

λ est une primitive de $b(x) \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.