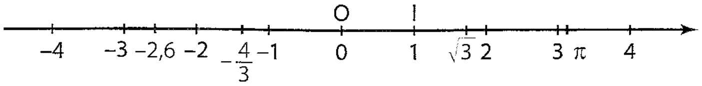
Les ensembles : vocabulaire et notations

1 Nombres réels et intervalles

NOTATION
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels

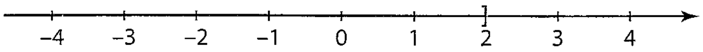
• Au collège, on a appris à représenter des nombres sur une droite graduée.



Les **nombres réels** (ou les réels) sont les abscisses de tous les points de la droite (OI) dans le repère (O, I). La droite graduée qui les représente s'appelle la droite numérique (ou la droite réelle).

Tous les nombres connus au collège et en seconde sont des nombres réels.

• On ne peut pas écrire la liste de tous les nombres réels x tels que $x \leqslant 2$. Au collège on a représenté ces nombres sur une droite graduée, par un trait, sans lever le crayon de la feuille. Ils forment un **intervalle**.



Il y a plusieurs types d'intervalles ; leurs notations se différencient par leurs bornes (finies ou non) et le sens de leurs crochets.

VOCABULAIRE
On lit
$-\infty$: « moins l'infini »
$+\infty$: « plus l'infini »

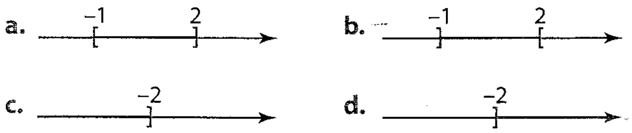
Représentation	Intervalle	Ensemble des réels x tels que
[−4 … 0 1 … 3]	$[-4\,;3]$	$-4 \leqslant x \leqslant 3$
[−4 … −2 [… 0 1	$[-4\,;-2[$	$-4 \leqslant x < -2$
] −1 0 1 2 [	$]-1\,;2[$	$-1 < x < 2$
0 1] 2,5 … 5]	$]\,2{,}5\,;5]$	$2{,}5 < x \leqslant 5$
−2] … 0 1	$]-\infty\,;-2]$	$x \leqslant -2$
0 1 [2	$[2\,;+\infty[$	$x \geqslant 2$

Attention au sens des crochets !
• Si une borne présente un crochet tourné vers l'intérieur, cette borne appartient à l'intervalle.
• Si une borne présente un crochet tourné vers l'extérieur, elle n'y appartient pas.

Exercices

autres exercices disponibles sur le site

1 Écrire sous forme d'intervalle les ensembles de réels représentés en rouge



2 Représenter, sur la droite numérique, les ensembles de réels x suivants et les écrire sous forme d'intervalles :

1. a. $x < 4$ **b.** $x \leqslant -2$ **c.** $x > 3$

2. a. $0 < x < 3$ **b.** $-3 \leqslant x \leqslant 4$ **c.** $1 \leqslant x \leqslant 4$

3. a. $-1 \leqslant x \leqslant 4$ **b.** $0 < x < 5$ **c.** $-2 \leqslant x < 5$

3 Recopier et compléter le tableau :

Inégalités	En rouge sur la droite graduée	Intervalle
$-10 < x \leqslant 21$	] −10 … 21]	$x \in\,]-10\,;21]$
	[−1 … 3]	
$1 < x < 7$		
		$x \in\,]-3;+\infty[$
	[−2	

2 Les ensembles de nombres

On distingue plusieurs ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres **entiers naturels** : 0, 1, 2, 3, …

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres **entiers relatifs** : … – 4, – 3 , – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, …

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** comme : 2,1 ; – 3 (ou – 3,0) ; 5,741236

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** : ce sont les nombres pouvant s'écrire comme quotient de deux entiers comme : $2{,}1=\frac{21}{10}$; $\frac{4}{3}$; $-13=\frac{-13}{1}$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** (voir page 348). Tous les nombres connus en seconde sont des nombres réels.

Exemple : $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels qui ne sont ni des entiers, ni des décimaux, ni des rationnels.

3 Vocabulaire des ensembles

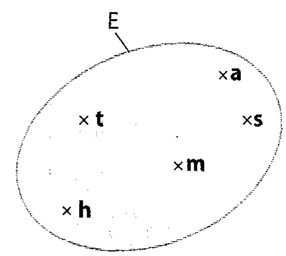
A. Ensemble, élément et appartenance

On obtient un **ensemble** en regroupant des objets distincts ; ces objets sont les **éléments** de l'ensemble.
On peut donner un nom à un ensemble et on peut parfois écrire tous ses éléments entre accolades.

NOTATIONS

Ensemble :
E est l'ensemble des lettres du mot maths :
E = {m; a; t; h; s}
Élément :
• t $\in$ E se lit « t appartient à E »
• c $\notin$ E se lit « c n'appartient pas à E »

Exemples :



• Si E est l'ensemble des lettres du mot *maths*,
E = {m; a; t; h; s} ou E = {a; h ; m; s; t} (l'ordre ne compte pas)
La lettre m est un élément de E : on dit que m appartient à E et on écrit m $\in$ E. En revanche c $\notin$ E.
On peut aussi représenter cet ensemble comme ci-contre.

• La classe de 2nde de Théo est un ensemble d'élèves nommé « 2nde 4 ».
Les éléments de cet ensemble sont les élèves de cette classe.

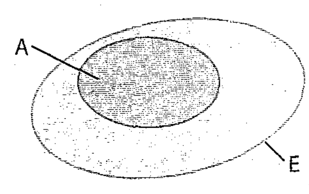
• $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels peut s'écrire : $\mathbb{N}$ = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … }. On a 2010 $\in \mathbb{N}$; – 5 $\notin \mathbb{N}$.

• La droite (AB) est un ensemble de points : M $\in$ (AB) signifie que le point M appartient à la droite (AB).

B. Sous-ensemble (ou partie), inclusion

Définition

Un ensemble A est **inclus** dans un ensemble E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E.
On dit que A est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de E.



NOTATIONS

• A $\subset$ E se lit « A est inclus dans E »

• B $\not\subset$ E se lit « B n'est pas inclus dans E »

Exemples :

• A = {m ; t ; h} est un sous-ensemble de E = {m ; a ; t ; h ; s} : on note A $\subset$ E.
B = {a ; t ; y} n'est pas un sous-ensemble de E car $y \in$ B et $y \notin$ E : on note B $\not\subset$ E.

• Karim, Clara et Manon sont dans la classe de Théo. L'ensemble {Karim ; Clara ; Manon} est un sous-ensemble de la classe de Théo.

• $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Mais $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ car par exemple 2,1 $\in \mathbb{D}$ et 2,1 $\notin \mathbb{Z}$.

NOTATIONS

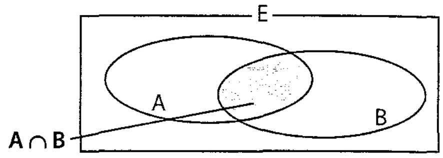
- $A \cap B$ se lit « A inter B »
- $A \cup B$ se lit « A union B »

C. Intersection et réunion

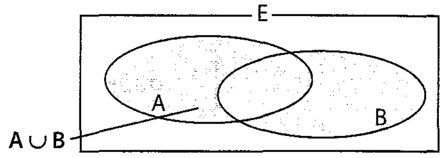
Définitions

A et B étant deux parties d'un ensemble E :

• L'ensemble des éléments appartenant **à l'une ET à l'autre** des parties A et B est l'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$.



• L'ensemble des éléments appartenant **à l'une OU à l'autre** des parties A et B (peut-être aux deux) est la **réunion** de A et B, notée $A \cup B$.



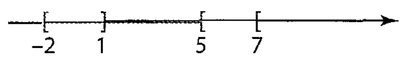
Exemples

1. Soit A = {t ; a ; b ; l ; e} et B = {a ; e ; i ; y} des parties de E = {l ; a ; b ; y ; r ; i ; n ; t ; h ; e}

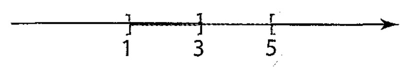
$A \cap B$ = {a ; e} , $A \cup B$ = {t ; a ; b ; l ; e ; i ; y}

2. Intersection et réunion d'intervalles

a. $I = [-2 ; 5[$ et $J =]1 ; 7[$ alors $I \cap J =]1 ; 5[$ et $I \cup J = [-2 ; 7[$.



b. $K =]1 ; 5[$ et $L =]-\infty ; 3]$ alors $K \cap L =]1 ; 3]$ et $K \cup L =]-\infty ; 5[$.



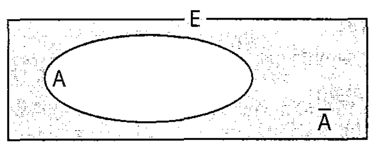
NOTATION

$\bar{A}$ se lit « A barre »

D. Complémentaire

Définition

Soit A un sous-ensemble de E.
L'ensemble des éléments de E qui **n'appartiennent pas** à A est la partie complémentaire de A dans E, notée $\bar{A}$.



Exemple : Si A = {m ; a ; h} et E = {m ; a ; t ; h ; s} alors $\bar{A}$ = {t ; s}.

Exercices

4 Recopier et compléter par $\in$ ou $\notin$:

a. 4 … $\mathbb{N}$ **b.** 2,5 … $\mathbb{N}$ **c.** 4,5 … $\mathbb{Q}$
d. $\sqrt{2}$ … $\mathbb{D}$ **e.** – 6 … $\mathbb{Z}$ **f.** 4 … $\mathbb{R}$

5 Soit A = {a ; k ; d ; f ; m ; u}, B = {u ; d ; m ; b} et C = {a; d ; f}

1. Recopier et compléter par $\subset$ ou $\not\subset$:

a. B … A **b.** C … B **c.** C … A

2. Écrire avec des accolades les ensembles $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$ et $A \cap C$.

3. Quel est le complémentaire de C dans A ?

6 Soit $I = [-1 ; 5]$ et $J = [3 ; 10]$.
Dire si chacun des nombres suivants appartient à I, à J, à $I \cap J$, à $I \cup J$:

a. 4 **b.** 5 **c.** 12 **d.** 8 **e.** –1 **f.** 6 **g.** 10

7 Représenter les intervalles I et J de deux couleurs différentes sur la même droite réelle. Donner ensuite leur réunion et leur intersection.

a. $I = [-6 ; 7]$, $J = [-2 ; 9]$ **b.** $I =]-3 ; 8]$, $J =]-5 ; 6[$
c. $I = [-1 ; 4[$, $J =]0 ; 6]$ **d.** $I =]-6 ; 2]$, $J =]-1 ; 1[$
e. $I =]-\infty ; 2]$, $J = [-1 ; 5]$ **f.** $I =]-\infty ; 3]$, $J = [4 ; +\infty[$
g. $I =]-5 ; 2]$, $J = [3 ; 6]$ **h.** $I =]-\infty ; 3]$, $J = [0 ; +\infty[$

8 Représenter les ensembles suivants sur la droite réelle puis les écrire à l'aide d'intervalles, en utilisant éventuellement le symbole $\cup$:

a. L'ensemble des réels x tels que $1 < x \leqslant 7$.

b. L'ensemble des réels x inférieurs à 4 OU supérieurs à 5.

c. L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant 5$ OU $x \leqslant -1$.