Le raisonnement logique

Le raisonnement logique n'est pas propre aux mathématiques ; il intervient au quotidien, dans les décisions que l'on prend, les gestes que l'on fait…
Le raisonnement le plus courant est l'implication : *« Si le feu est rouge alors je dois m'arrêter. »*
Mais il existe de nombreuses autres façons de s'assurer d'un résultat.
Par exemple, supposons que lorsqu'il pleut je prends toujours un parapluie. En conséquence, lorsque je me promène sans parapluie, on peut en conclure qu'il ne pleut pas : c'est logique !
Tous ces raisonnements sont utilisés en mathématiques pour démontrer un résultat. Vous trouverez dans ces pages tous les outils du raisonnement logique que vous pouvez utiliser pour démontrer.

1 Les connecteurs logiques : et, ou

Dans le langage usuel, le mot « ou » signifie le plus souvent un choix exclusif, comme « fromage ou dessert ». On parle de « ou » **exclusif**.
En mathématiques, le mot « ou » propose un choix qui n'est pas exclusif : « un élément appartient à A ou B » ne signifie pas « cet élément appartient soit à A, soit à B » mais « cet élément appartient **au moins** à A ou à B » ; dans ce cas, il peut appartenir soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles. On parle alors de « ou » **inclusif.**

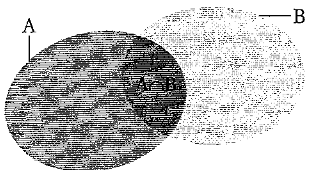
EXEMPLE

Considérons la phrase : « Tous les élèves de la chorale ou du cours de danse participent au spectacle. »
Dans cette phrase, le « ou » est inclusif : il inclut aussi les élèves qui participent à la fois à la chorale et au cours de danse.

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B. On note cette intersection **A∩B**.
La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B. On note cette réunion **A∪B.**

EXEMPLE 1

Reprenons l'exemple précédent. On note A l'ensemble des élèves de la chorale et B l'ensemble des élèves du cours de danse.
A∪B est la partie colorée. Elle contient A∩B.



EXEMPLE 2

Dans la famille des parallélogrammes, en notant A l'ensemble des rectangles et B l'ensemble des losanges, on a :
- A∩B est l'ensemble des carrés ;
- A∪B contient les rectangles non carrés, les losanges non carrés et les carrés.

2 Les quantificateurs : pour tout, quel que soit, il existe

REMARQUE Les quantificateurs sont intéressants pour donner un contre-exemple.
Par exemple, la proposition « tout parallélogramme a ses diagonales de longueurs différentes » est fausse car il existe des parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur.

Les quantificateurs permettent de connaître le domaine de validité d'une propriété.

Ils sont donc essentiels pour savoir dans quel cas une propriété peut s'appliquer.

EXEMPLES

- On considère les trois affirmations suivantes :

« **Tout** parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »
« **Quel que soit** x, x^2 est positif ou nul. »
« **Tous** les ans, Noël est en décembre. »

Dans ces trois affirmations, on énonce une **propriété universelle**, vraie pour tout les parallélogrammes, pour tout nombre réel x, pour chaque année.

- On considère les trois affirmations suivantes :

« **Il existe** des parallélogrammes dont les diagonales sont de même longueur. »
« **Il existe** des réels x tels que $x^2 > 100$. »
« **Il existe** des années où il ne neige pas. »

Dans ces trois affirmations, on énonce une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas universelle.

ATTENTION ! Les quantificateurs sont essentiels dans une proposition mais ils sont souvent implicites : il faut donc veiller à les repérer.

EXEMPLES

- « Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »
Le quantificateur implicite est « **tout** ».
- « Un parallélogramme peut avoir des diagonales de même longueur. »
Le quantificateur implicite est « **il existe** ».

Les deux quantificateurs « tout » et « il existe » sont souvent liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition.

EXEMPLES

- Le contraire de la proposition « **Toutes** les fenêtres sont fermées » est la proposition « **Il existe** une fenêtre (au moins) d'ouverte ».
- Le contraire de la proposition « **Tous** les carrés sont des losanges » est la proposition « **Il existe** des losanges qui ne sont pas carrés ».

3 Implication, réciproque, contraposée et équivalence

ATTENTION ! Le sens de lecture de l'implication est essentiel.

Le principe même du raisonnement mathématique est **l'implication** (propriété directe) : un fait en implique un autre, une hypothèse entraîne une conclusion.

Une propriété et sa **réciproque** ne sont pas toujours équivalentes.
Une propriété et sa **contraposée** sont équivalentes.

EXEMPLES

Supposons que la propriété P suivante soit toujours vraie : « Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux. »

- La **réciproque** de la propriété P est : « Si je suis heureux alors je suis habillé en bleu. »
Cette propriété n'est pas nécessairement vraie car il y a peut-être d'autres raisons d'être heureux.
- La **contraposée** de la propriété P est : « Si je ne suis pas heureux alors je ne suis pas habillé en bleu. »
Cette propriété est nécessairement vraie, car si j'étais habillé en bleu, je serais heureux, or je ne suis pas heureux, donc je ne peux pas être habillé en bleu.

En notant A et B deux propositions, nonA et nonB leurs propositions contraires, on peut résumer les relations entre ces propositions ainsi :

Propriétés indépendantes	**Implication :** A entraîne B *Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux.*	Propriétés équivalentes $\Leftrightarrow$	**Contraposée :** nonB entraîne nonA *Si je ne suis pas heureux alors je ne suis pas habillé en bleu.*
	Réciproque : B entraîne A *Si je suis heureux alors je suis habillé en bleu.*	Propriétés équivalentes $\Leftrightarrow$	**Contraposée de la réciproque :** nonA entraîne nonB *Si je ne suis pas habillé en bleu alors je ne suis pas heureux.*

REMARQUE

La propriété « Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux » n'est pas équivalente à « Si je ne suis pas habillé en bleu alors je ne suis pas heureux », bien qu'on confonde souvent leur sens par un raisonnement trop hâtif.

Lorsqu'une propriété et sa réciproque sont simultanément vraies, on dit que la propriété est une **équivalence**.

EXEMPLES

- La propriété « Un quadrilatère est un carré **si et seulement si** il est losange et rectangle » peut se décliner en deux propriétés :
– propriété directe : « Si un quadrilatère est un carré alors il est losange et rectangle. »
– propriété réciproque : « Si un quadrilatère est losange et rectangle alors c'est un carré. »
- Les égalités $x^2 = 9$ et $x = 3$ ne sont pas équivalentes : si $x = 3$ alors $x^2 = 9$ mais la réciproque est fausse car si $x^2 = 9$ alors $x = 3$ ou $x = -3$.