Raisonnement logique

4 « Si…alors… », « si et seulement si »

A. Proposition conditionnelle (ou implication)

Une proposition conditionnelle est une phrase du type :
« si ***proposition A*** alors ***proposition B*** ».

Une proposition conditionnelle peut être vraie ou fausse.

NOTATION
« si *A* alors *B* »
peut se noter : « $A \Rightarrow B$ »
ce qui se lit : « *A* implique *B* »

Quand on sait que « si *A* alors *B* » est vraie (c'est par exemple une propriété du cours), on est sûr que lorsque la *proposition A* est vraie, la *proposition B* est automatiquement vraie. **Attention**, lorsque la *proposition A* est fausse, on ne peut rien dire sur *B* ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse.

Exemple
« Si **I est le milieu du segment [EF]** alors **les points E, I, F sont alignés** » est une proposition vraie.

• Si le point I est donné dans un énoncé comme étant le milieu de [EF], on est sûr que E, I, F sont alignés.

• **Attention**, si I n'est pas le milieu de [EF], on ne peut pas dire si E, I, F sont alignés ou pas : ils peuvent l'être ou ne pas l'être.

Comment démontrer que « si *A* alors *B* » est vraie ?
On enchaîne en général des propositions « si …alors… » dont on sait qu'elles sont vraies (propriétés, définitions) pour passer de la *proposition A* à la *proposition B*.

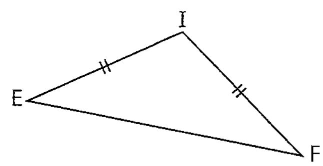
Exemple
On sait que les propositions suivantes sont vraies :
« Si **MNP est isocèle en M** alors **MN = MP** »
« Si **MN = MP** alors **M appartient à la médiatrice de [NP]** ».
En enchaînant ces « si…alors… » qui sont vraies, on démontre que « Si **MNP est isocèle en M** alors **M appartient à la médiatrice de [NP]** » est vraie.

Comment démontrer que « si *A* alors *B* » est fausse ?
Pour montrer qu'elle est fausse, on montre que l'on peut avoir à la fois la *proposition A* vraie ET la *proposition B* fausse.

Un exemple qui permet de démontrer qu'une proposition conditionnelle est fausse s'appelle un contre-exemple.

Exemples
• « S'il y a des nuages alors il pleut » est fausse, car il peut y avoir des nuages sans pleuvoir.

• « Si **IE = IF** alors **I est le milieu du segment [EF]** » est fausse. En effet sur la figure ci-contre « **IE = IF** » est vraie mais « **I est le milieu de [EF]** » est fausse. La figure ci-contre est un contre-exemple.



C'est sous la forme « si …alors… » que sont rédigées en général les propriétés au collège mais ce « si …alors » peut être parfois masqué ! Par exemple « un losange a ses diagonales perpendiculaires » signifie que « Si **un quadrilatère est un losange**, alors **ses diagonales sont perpendiculaires** ».

B. Réciproque d'une proposition conditionnelle

La proposition conditionnelle :
si ***proposition A*** alors ***proposition B***
a pour réciproque :
si ***proposition B*** alors ***proposition A***.
Elles peuvent être vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre.

Exemples
• La proposition « s'**il pleut** alors **il y a des nuages** » (vraie)
Sa réciproque : « s'**il y a des nuages** alors **il pleut** » (fausse)
• La proposition : « si $x = 3$ alors $2x = 6$ » (vraie)
Sa réciproque : « si $2x = 6$ alors $x = 3$ » (vraie)

C. « Si et seulement si », « équivaut à »

La *proposition* « A si et seulement si B » est la proposition « si A alors B » et « si B alors A ». On dit que A et B sont équivalentes : elles sont vraies en même temps, fausses en même temps.

Notation : « A équivaut à B se note $A \Leftrightarrow B$

Exemples

- On a : « si **MNP est isocèle en M** alors $\widehat{MNP} = \widehat{MPN}$ » et « si $\widehat{MNP} = \widehat{MPN}$ alors **MNP est isocèle en M** ».

On peut donc écrire :

« **MNP est isocèle en M** si et seulement si $\widehat{MNP} = \widehat{MPN}$ »

« **MNP est isocèle en M** équivaut à $\widehat{MNP} = \widehat{MPN}$ »

- « $2x = 6$ si et seulement si $x = 3$ » ce qui s'écrit encore « $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ ».

D. Contraposée d'une proposition conditionnelle

La proposition conditionnelle :
« si **proposition A** alors **proposition B** »
a pour contraposée
« si **négation de B** alors **négation de A** »
Une proposition et sa contraposée sont équivalentes. Elles sont vraies en même temps, fausses en même temps.

Exemples

- La proposition : « s'**il pleut** alors **il y a des nuages** » (vraie)
Sa contraposée : « s'**il n'y a pas de nuages** alors **il ne pleut pas** » (vraie)
- La proposition : « pour tout x réel, si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ » (fausse)
Sa contraposée : « pour tout x réel, si $x \neq 2$ alors $x^2 \neq 4$ » (fausse)

Raisonnement par contraposition

Pour démontrer qu'une proposition conditionnelle est vraie, on peut démontrer que sa contraposée est vraie puisqu'elles sont équivalentes. C'est parfois plus facile !

Énoncé : Soit n un entier. Démontrer que « si **$n^2 + n$ est strictement négatif**, alors **n est strictement négatif** »

Démonstration : Ceci revient à démontrer la contraposée :
« si **n est positif ou nul** alors **$n^2 + n$ est positif ou nul** ».
La contraposée se démontre facilement : en effet si n est positif ou nul, comme n^2 est toujours positif ou nul, $n^2 + n$ est une somme de deux nombres positifs ou nuls, donc $n^2 + n$ est positif ou nul.

E. « Il faut, il suffit ». Condition nécessaire, condition suffisante

Quand l'implication « si A alors B » est vraie :

– A est une condition suffisante pour B :
il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie.

– B est une condition nécessaire pour A :
A ne peut pas être vraie sans que B soit vraie.
Il faut que B soit vraie pour que A soit vraie.

Exemples

- Pour avoir $x + y = 6$, il suffit d'avoir $x = 2$ et $y = 4$. Mais ce n'est pas nécessaire ! On pourrait avoir $x = 4{,}5$ et $y = 1{,}5$. « Avoir $x = 2$ et $y = 4$ » est une condition suffisante (pas nécessaire) pour avoir « $x + y = 6$ ».
- Pour faire de la pâte à crêpes, il faut de la farine. Autrement dit, il est nécessaire d'avoir de la farine. Mais « avoir de la farine » ne suffit pas ! « Avoir de la farine » est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour « faire de la pâte à crêpes ».

Trois façons de dire la même chose :
- Pour que A soit vraie il faut et il suffit que B soit vraie (et inversement)
- A équivaut à B
- B est une condition nécessaire et suffisante pour A (et inversement).

Exemples

Pour avoir $2x = 6$, il suffit que $x = 3$ (si on a $x = 3$, on est sûr que $2x = 6$).

Pour avoir $2x = 6$, il faut que $x = 3$ ($2x$ ne peut pas être égal à 6 si x n'est pas égal à 3).

Finalement pour avoir $2x = 6$ il faut et il suffit d'avoir $x = 3$.

Raisonnement logique

5 « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs

• « Il existe un… » signifie « Il existe **au moins un**… ». Par exemple :
« Il existe un nombre x tel que $x^2 - 1 = 3$ » : si on prend $x = 2$, on a bien $x^2 - 1 = 3$. On aurait aussi pu prendre $x = -2$.

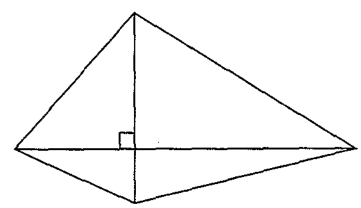
• « Pour tout », « quel que soit » : on a vu au collège que quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace a et b, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
On l'énonce ainsi : « Quels que soient a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ »
ou encore : « Pour tous a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ ».
Attention ! Très souvent « quel que soit » ou « pour tout » sont implicites. Par exemple, « **un** rectangle a ses diagonales de même longueur » signifie que « quel que soit le rectangle que l'on considère, il a ses diagonales de la même longueur ».
Ici « **un** » signifie « **un quelconque** », « **pour tout** ».

VOCABULAIRE
« Un » a plusieurs significations :
« un exactement »,
« au moins un »,
« un quelconque ».

Raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple

• **Pour démontrer « il existe un … », il suffit d'en trouver un : produire un exemple suffit !**
• **Pour démontrer « pour tout … », il suffit d'envisager tous les cas ; mais s'ils sont en nombre infini, ce n'est plus possible. Des exemples ne suffisent pas.**
• **Pour démontrer que « pour tout, … » est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple.**

• Démontrer que « il existe un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires » : il suffit d'en construire un, comme ci-contre.



• Démontrer que « tout nombre multiple de 6 est aussi multiple de 2 ». Il faudrait tester tous les multiples de 6, mais il y en a une infinité ! Ce n'est donc pas possible. Il faut faire une démonstration dans le cas général.
• Démontrer que « pour tout nombre x, $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ » est faux. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x + 1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.

6 Autres types de raisonnement

Raisonnement par disjonction de cas

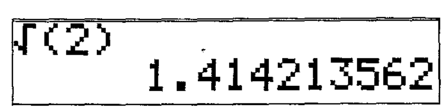
On est parfois amené à faire une démonstration en distinguant plusieurs cas.

Énoncé : Démontrer que pour tout entier naturel n, $n \times (n + 1)$ est un nombre pair.
Démonstration : Il y a 2 cas possibles et 2 seulement : n est soit pair, soit impair.
– Si n est pair, $n \times (n + 1)$ est le produit d'un nombre pair par un entier : il est pair ;
– Si n est impair, c'est $n + 1$ qui est pair. Donc $n \times (n + 1)$ est encore pair.
On a donc bien démontré que, pour tout entier naturel n, $n \times (n + 1)$ est pair.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'elle ne peut pas être fausse.
On suppose donc que sa négation est vraie et on montre que c'est impossible !

Énoncé : Démontrer $\sqrt{2} \neq 1{,}414\,213\,562$.
Démonstration : Supposons que $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562$.



Alors $\sqrt{2}^2 = 1{,}414\,213\,562^2$. D'une part $\sqrt{2}^2 = 2$ et d'autre part $1{,}414\,213\,562^2$ a pour dernier chiffre 4. On arrive à une contradiction.
Il est donc impossible que $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562$ (ce n'est qu'une valeur approchée).

Exercices

1 ET/OU
Donner les entiers de 0 à 20 qui sont :
a. pairs ET multiples de 5
b. pairs OU multiples de 5
c. supérieurs à 2 ET inférieurs à 8

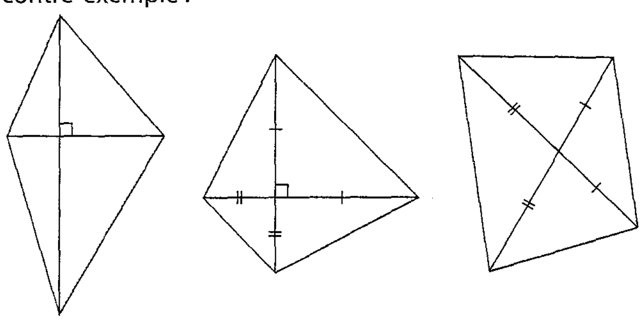
2 ET/OU
Pour $x = 4$, les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a. $x > 0$ ET $x < 5$ **b.** $x < 0$ OU $x > 3$
c. $x = 3$ OU $x > 3$ **d.** $x \geqslant 4$

3 Négation
Écrire la négation des propositions suivantes.
a. $x > 4$ **b.** n est pair OU multiple de 5
c. $2 \leqslant x < 5$ **d.** n est pair ET multiple de 5
e. $a = b = c$

4 Des dictons
Réécrire ces dictons sous la forme « si…alors… » :
a. « Qui ne dit mot, consent »
b. « Noël au balcon, Pâques au tison »
c. « Vouloir, c'est pouvoir »

5 Réécrire sous la forme « si…alors… » :
a. un triangle équilatéral a trois angles de 60° ;
b. un entier dont le chiffre des unités est 5 est un multiple de 5 ;
c. un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur est un rectangle ;
d. un point M de la médiatrice de [AB] est équidistant de A et B.

6 Contre-exemples
a. La proposition « si n est multiple de 6 et n est multiple de 8 alors n est multiple de 6×8 » est fausse.
Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 48 ; 24 ; 96 ; 16 ?
b. La proposition « pour tout x réel, si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ » est fausse. Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 2 ; 5 ; – 2 ; – 1 ; – 6 ?
c. La proposition « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un carré » est fausse. Les figures suivantes en fournissent-elles un contre-exemple :



7 Vrai ou Faux ?
a. Si OA = OB alors B est le symétrique de A par rapport à O.
b. Si ABCD a ses diagonales perpendiculaires alors ABCD est un losange.
c. Un carré a ses diagonales de la même longueur.

8 Vrai ou faux ?
a. Si $x > 3$ alors $x > 5$ **b.** Si $x > 2{,}1$ alors $x > 1$
c. Si $-2{,}1 < x < 3{,}4$ alors $-2 < x < 4$
d. Si $-2{,}1 < x < 3{,}4$ alors $-3 < x < 4$

9 Réciproque
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Et leurs réciproques ?
a. « Si c'est un lapin alors il a 4 pattes et 2 oreilles ».
b. « Si $x = -4$ alors $x^2 = 16$ ».
c. « Si ABCD est un carré alors (AB) // (CD) ».
d. « Si n est multiple de 10, alors n est multiple de 5 ».

10 Équivalence
On donne deux propositions A et B.
A-t-on : $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$?
a. Pour tout x réel, « $x^2 = 25$ » et « $x = -5$ ».
b. Pour tout x réel, « x est le carré d'un nombre » et « $x \geqslant 0$ ».
c. « MNPS est un losange » et « MNPS est un carré ».
d. « MNP est rectangle en M » et « $NP^2 = MN^2 + MP^2$ ».

11 Il faut et il suffit, nécessaire, suffisant
1. Réécrire les résultats de l'exercice 10 avec « il faut », « il suffit », « condition nécessaire » ou « suffisante ».
2. Recopier et compléter par « il faut » ou « il suffit » :
a. pour que $x < -3$, … que $x < 5$;
b. pour que $x > 2$, … que $x > 4$.

12 Contraposée
Écrire les contraposées des propositions de l'exercice 9.
Les propositions et leurs contraposées sont-elles vraies ou fausses ?

13 Quantificateurs
A est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.
Réécrire en utilisant « pour tout » ou « il existe » :
a. … M appartenant à $\mathscr{C}$, OM = OA
b. … M appartenant à $\mathscr{C}$, AM = r
c. … M appartenant à $\mathscr{C}$, (OM) $\perp$ (OA)
d. … M extérieur au cercle, OM = $2r$
e. … M extérieur au cercle, OM > r

14 Quantificateurs
x et y sont deux nombres réels. Ajouter « pour tous x et y » ou « il existe x et y » à ces propositions :
a. $xy = 3$ **b.** $x^2 + y^2 \geq 0$ **c.** $x + y > x$ **d.** $(xy)^2 = x^2y^2$